Politechnika Łódzka

Elementy algebry liniowej i geometrii analitycznej – rozszerzony konspekt

Elżbieta Kotlicka
Bożenna Szkopińska
Witold Walas

Łódź 2009

1. Podstawowe struktury algebraiczne, ciała, ciało liczb zespolonych

1.1. Działania wewnętrzne, grupy

Zbiory oznaczamy zwykle dużyli literami np. A, X, K. Fakt, że a jest elementem zbioru A zapisujemy jako $a \in A$. Jeżeli $a \in A$ i $b \in B$, to **parą uporządkowaną** o poprzedniku a i następniku b nazywamy zbiór

$$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Dwie pary (a, b) i (x, y) są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = x$ i $b = y$. Zbiór wszystkich par uporządkowanych o poprzedniku z A i następniku z B nazywamy **iloczynem kartezjańskim** zbiorów A i B i oznaczamy przez $A \times B$. Mamy więc

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Definicja 1.1. Niech A będzie niepustym zbiorem.

- Każdą funkcję
$$\circ : A \times A \to A$$
nazywamy **działaniem (wewnętrznym)** w zbiorze A.
- Jeżeli $\circ$ jest działaniem wewnętrznym w A, to uporządkowaną parę $(A, \circ)$ nazywamy **strukturą algebraiczną**.

Definicja 1.2. Zbiór G wraz z działaniem $\circ : G \times G \to G$ i wyróżnionym elementem $e \in G$ nazywamy **grupą**, jeżeli spełnione są warunki:

a) działanie $\circ$ jest łączne, czyli
$$\bigwedge_{a,b,c \in G} a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c,$$
b) dla dowolnego $a \in G$ zachodzi
$$a \circ e = a,$$
c) dla dowolnego $a \in G$ istnieje $b \in G$ takie, że
$$a \circ b = e.$$

Jeżeli G jest grupą, to istnieje dokładnie jeden element e mający własność (b) — nazywamy go **elementem neutralnym** grupy G. Zachodzi przy tym równość

$$a \circ e = e \circ a.$$

Wykazuje się również, że dla każdego $a \in G$ istnieje dokładnie jeden element $b \in G$ taki, że zachodzi warunek c) — nazywamy go **elementem odwrotnym** do a i oznaczamy przez a^{-1}. Wówczas

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

Definicja 1.3. Grupę G nazywamy grupą **abelową** (**przemienną**), jeżeli dla dowolnych $a, b \in G$ mamy

$$a \circ b = b \circ a.$$

Uwaga 1.4. Można łatwo pokazać, że zbiór liczb naturalnych z dodawaniem i zerem (jak również zbiór liczb całkowitych z mnożeniem i jedynką) nie stanowi grupy.

Definicja 1.5. Niech G będzie grupą z działaniem $\circ$. Niepusty podzbiór $H \subset G$ nazywamy **podgrupą** grupy G, jeżeli H z działaniem $\circ$ też jest grupą.

Twierdzenie 1.6. *Niepusty podzbiór $H \subset G$ jest podgrupą grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:*

a) $\bigwedge\limits_{a,b\in H} a \circ b \in H$,
b) $\bigwedge\limits_{a\in H} a^{-1} \in H$.

1.2. Ciała

Definicja 1.7. **Ciałem** nazywamy dowolny zbiór K z działaniami wewnętrznymi

$$\oplus : K \times K \to K, \quad \odot : K \times K \to K,$$

zwanymi odpowiednio dodawaniem i mnożeniem, oraz wyróżnionymi elementami $0, 1 \in K$ takimi, że spełnione są warunki:

a) zbiór K z działaniem $\oplus$ i elementem 0 jest grupą abelową,
b) zbiór $K \setminus \{0\}$ z działaniem $\odot$ i elementem 1 jest grupą abelową,
c) działanie $\odot$ jest rozdzielne względem $\oplus$, tzn.

$$\bigwedge_{a,b,c\in K} a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)\,.$$

Formalnie ciało zapisujemy jako uporządkowaną trójkę postaci $(K, \oplus, \odot)$. Jeżeli $a \in K$, to element b z K taki, że $a \oplus b = 0$ nazywamy elementem przeciwnym do a. Jeśli natomiast $a \in K \setminus \{0\}$, to to element b z K taki, że $a \odot b = 1$ nazywamy elementem odwrotnym do a.

Definicja 1.8. Podzbiór $L \subset K$ nazywamy **podciałem** ciała $(K, \oplus, \odot)$, jeżeli $(L, \oplus, \odot)$ wraz z wyróżnionymi elementami 0, $1 \in L$ jest też ciałem.

Twierdzenie 1.9. *Niech $(K, \oplus, \odot)$ będzie dowolnym ciałem. Wówczas*

1) $0 \neq 1$;
2) $\bigwedge\limits_{a,b\in K} [a \odot b = 0 \;\Leftrightarrow\; (a = 0 \vee b = 0)]$;
3) $\bigwedge\limits_{a\in K} a \odot 0 = 0$.

Uwaga 1.10. Zbiór $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ z działaniami zdefiniowanymi w poniższych tabelkach nie jest ciałem. Mamy bowiem $2 \odot 2 = 0$, co stanowi sprzeczność z tw. 1.9.

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

1.3. Ciało liczb zespolonych

Definicja 1.11. **Ciałem liczb zespolonych** nazywamy zbiór $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ wraz z wyróżnionymi elementami $\mathbf{0} = (0, 0)$ i $\mathbf{1} = (1, 0)$ oraz działaniami $+$ i $\cdot$ zdefiniowanymi jak poniżej:

$$(a, b) + (x, y) \overset{\text{def}}{=} (a + x, b + y)\,, \qquad (a, b) \cdot (x, y) \overset{\text{def}}{=} (ax - by, ay + bx) \quad \text{dla} \;\; (a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Bez trudu można sprawdzić łączność i przemienność dodawania i mnożenia oraz rozdzielność mnożenia względem dodawania. Liczbą przeciwną do (x, y) jest

$$-(x,y) = (-x,-y)\,,$$

zaś odwrotną do $(x, y) \neq \mathbf{0}$ jest

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Ciało liczb zespolonych spełnia warunki a) – c) w definicji 1.7, stanowi zatem przykład kolejnego ciała. W dalszym ciągu zero $\mathbf{0}$ i jedynkę $\mathbf{1}$ zespoloną będziemy oznaczać po prostu przez 0 i 1. Przyjmujemy też oznaczenie:

$$i \stackrel{\text{def}}{=} (0,1)\,.$$

Uwaga 1.12. Zauważmy, że

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0) = -(1,0) = -1,$$

co oznacza, że w zbiorze liczb zespolonych równanie $z^2 = -1$ posiada rozwiązanie — jest nim liczba i (łatwo sprawdzić, że drugim jest liczba $-i$).

Uwaga 1.13. Liczbę zespoloną $(x, 0)$ będziemy utożsamiać z liczbą rzeczywistą x. W konsekwencji ciało $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ można traktować jako podciało ciała $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Dodajmy, że ciało liczb zespolonych jest najmniejszym (w sensie inkluzji) ciałem zawierającym ciało liczb rzeczywistych oraz liczbę urojoną i.

Definicja 1.14. **Ciałem liczbowym** nazywamy ciało $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ oraz każde jego podciało. Najmniejszym (w sensie inkluzji) podciałem ciała $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciało $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Jeśli $z = (x, y)$ jest liczbą zespoloną, to

$$\begin{aligned}(x,y) &= (x,0)+(0,y) = \\ &= (x,0)+(0,1)\cdot(y,0) = \\ &= x+iy.\end{aligned}$$

A zatem każdą liczbę zespoloną $z = (x, y)$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, można jednoznacznie przedstawić w postaci $z = x+iy$, zwanej **postacią kartezjańską** liczby zespolonej.

Liczbę zespoloną $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, można graficznie traktować jako punkt (x, y) lub jako wektor $[x, y]$ zaczepiony w punkcie $(0, 0)$. Stąd zbiór liczb zespolonych nazywamy też **płaszczyzną zespoloną (płaszczyzną Gaussa, płaszczyzną Arganda)**. Z tego również powodu dodawanie (odejmowanie) liczb zespolonych można interpretować jako dodawanie (odejmowanie) wektorów.

Uwaga 1.15. Liczb zespolonych nie porównujemy ze sobą w relacji mniejszości $<$. Mówiąc dokładniej, nie istnieje taka relacja w zbiorze $\mathbb{C}$, która by zachowywała własności relacji $<$ ze zbioru $\mathbb{R}$.

Definicja 1.16. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas

- liczbę x nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z i oznaczamy przez $\operatorname{Re} z$, a zatem

$$\operatorname{Re} z \stackrel{\text{def}}{=} x;$$

- liczbę y nazywamy **częścią urojoną** liczby z i oznaczamy przez $\operatorname{Im} z$, czyli

$$\operatorname{Im} z \stackrel{\text{def}}{=} y.$$

Liczbę postaci $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbą **czysto urojoną**.

Uwaga 1.17. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas

$$z = w \quad \Leftrightarrow \quad (\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \ \wedge\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w)\,.$$

1.4. Sprzężenie i moduł liczby zespolonej

Definicja 1.18. **Sprzężeniem** liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę

Twierdzenie 1.19. *Niech* $z, w \in \mathbb{C}$. *Wówczas* $\overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - iy$.

1) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$;
2) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
3) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, *o ile* $w \neq 0$;
4) $\overline{(\overline{z})} = z$;
5) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$;
6) $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

Definicja 1.20. **Modułem** liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę rzeczywistą

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Geometrycznie moduł liczby $z = x+iy$ oznacza odległość punktu (x, y) od początku układu współrzędnych.
Zauważmy, że jeżeli z jest liczbą rzeczywistą, to

$$|z| = |x + 0 \cdot i| = \sqrt{x^2} = |x|\,,$$

gdzie $|x|$ oznacza wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x.

Twierdzenie 1.21. *Niech* $z, w \in \mathbb{C}$. *Wówczas*

1) $|z| = |-z| = |\overline{z}|\,;$
2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|\,;$
3) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, *o ile* $w \neq 0$;
4) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (*tzw.* ***nierówność trójkąta***);
5) $||z| - |w|| \leqslant |z - w|\,;$
6) $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|\,,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|\,;$
7) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

1.5. Argument i postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ i $z \neq 0$. Zauważmy, że

$$\left(\tfrac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{|z|}\right)^2 = \tfrac{x^2}{|z|^2} + \tfrac{y^2}{|z|^2} = \tfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

To oznacza, że punkt o współrzędnych $\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|}\right)$ leży na okręgu o promieniu 1 o środku w początku układu współrzędnych. Istnieje zatem nieskończenie wiele liczb $\varphi \in \mathbb{R}$ takich, że

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|}. \end{cases} \qquad (*)$$

Definicja 1.22.

- Jeżeli $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ i $z \neq 0$, to każdą liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą równości $(*)$ nazywamy **argumentem** liczby zespolonej z. Zbiór wszystkich argumentów liczby z oznaczamy przez $\arg z$.

- Spośród wszystkich argumentów liczby $z \neq 0$ dokładnie jeden należy do przedziału $[0, 2\pi)$ — nazywamy go **argumentem głównym** liczby z i oznaczamy symbolem $\operatorname{Arg} z$. (Wybór przedziału jest kwestią umowną — czasami przyjmuje się, że $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$).
- Przyjmujemy dodatkowo, że argumentem liczby 0 jest każda liczba $\varphi \in \mathbb{R}$ oraz że $\operatorname{Arg} 0 = 0$.

Łatwo widać, że
$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$
Jeżeli $z = x + iy$ jest dowolną liczbą zespoloną, to z $(*)$ wynika, że
$$x = |z| \cos\varphi, \quad y = |z| \sin\varphi,$$
gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ jest argumentem liczby z. Stąd dostajemy
$$\begin{aligned} z &= x + iy = |z| \cos\varphi + i\,|z| \sin\varphi = \\ &= |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi). \end{aligned}$$
A zatem każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci:
$$z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad \text{gdzie} \quad \varphi \in \arg z,$$
zwanej **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej.

Twierdzenie 1.23. *Jeżeli $z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ oraz $w = |w| (\cos\psi + i \sin\psi)$, to*

1) $z \cdot w = |z|\,|w| (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$;
2) $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$, *o ile* $w \neq 0$.

Wniosek 1.24. *Jeżeli $z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ oraz $n \in \mathbb{Z}$, to*
$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$
W szczególności, jeśli $|z| = 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to
$$z^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi). \qquad \textbf{(wzór de Moivre'a)}$$

Definicja 1.25. Niech $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba zespolona w jest **pierwiastkiem stopnia n z liczby z**, gdy $w^n = z$. Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

Twierdzenie 1.26. *Jeżeli $z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ jest liczbą zespoloną różną od zera, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n z liczby z. Pierwiastki te mają postać*
$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1.6. Postać wykładnicza liczby zespolonej

Wprowadźmy oznaczenie
$$e^{i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\varphi + i \sin\varphi,$$
gdzie e jest liczbą niewymierną równą granicy ciągu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (w przybliżeniu $2,72$). Wówczas dowolną liczbę zespoloną z można zapisać w postaci
$$z = |z|\, e^{i\varphi}, \quad \text{gdzie } \varphi \in \arg z,$$
zwanej **postacią wykładniczą** liczby zespolonej z.

Twierdzenie 1.27. *Jeżeli $z = |z|\, e^{i\varphi}$ oraz $w = |w|\, e^{i\psi}$, to*

1) $-z = |z|\, e^{i(\varphi + \pi)}$;
2) $\overline{z} = |z|\, e^{-i\varphi}$;

3) $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} e^{-i\varphi}$, *o ile* $z \neq 0$;

4) $z \cdot w = |z|\, |w|\, e^{i(\varphi+\psi)}$;

5) $z^n = |z|^n\, e^{in\varphi}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$;

6) $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\varphi-\psi)}$, *o ile* $w \neq 0$.

Twierdzenie 1.28. *Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą równości:*

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right). \qquad (\textbf{wzory Eulera})$$

1.7. Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie 1.29 (Zasadnicze twierdzenie algebry). *Każdy wielomian stopnia dodatniego n o współczynnikach zespolonych ma w ciele $\mathbb{C}$ dokładnie n (niekoniecznie różnych) pierwiastków.*

Wniosek 1.30. *Każdy wielomian W stopnia dodatniego n o współczynnikach zespolonych można rozłożyć na czynniki liniowe, tzn.*

$$W(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n),$$

gdzie $a_n, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

Uwaga 1.31. Jeżeli W jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych i $z_0 \in \mathbb{C}$ jest jego pierwiastkiem, to liczba $\overline{z}_0$ jest również pierwiastkiem wielomianu W, przy czym krotności pierwiastków z_0 i $\overline{z}_0$ są sobie równe.

Wniosek 1.32. *Każdy wielomian stopnia dodatniego o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki liniowe postaci: $(x - a)$, bądź kwadratowe postaci: $(x^2 + px + q)$, gdzie $\Delta = p^2 - 4q < 0$.*

Wniosek 1.33. *Każdy wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych ma pierwiastek rzeczywisty.*

2. Macierze i wyznaczniki

2.1. Macierze i ich rodzaje

Definicja 2.1. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem oraz $m, n \in \mathbb{N}$. **Macierzą** o m wierszach i n kolumnach ($m \times n$-macierzą, macierzą wymiaru $m \times n$) o wyrazach w zbiorze X nazywamy dowolną funkcję

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to X.$$

Jeżeli $X = \mathbb{R}$ ($X = \mathbb{C}$), to mówimy wtedy o macierzy rzeczywistej (zespolonej). Liczby m i n nazywamy **wymiarami** macierzy A. Zbiór wszystkich macierzy wymiaru $m \times n$ o wyrazach ze zbioru X oznaczamy symbolem $M_{m,n}(X)$ (w szczególności $M_{m,n}(\mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich $m \times n$ macierzy rzeczywistych). Jeśli zbiór X jest ustalony, to dla skrócenia zapisu będziemy używać notacji $M_{m,n}$.

Przyjmujemy następujące oznaczenie

$$a_{ij} \overset{\text{def}}{=} A(i, j).$$

Wówczas macierz A reprezentujemy w postaci tablicy

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-ty wiersz} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ j\text{-ta kolumna} \end{array} & \end{array}$$

i zapisujemy krótko

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \quad \text{lub} \quad A = [a_{ij}]\,.$$

Uwaga 2.2. Mówimy, że macierze $A = [a_{ij}]\,, B = [b_{ij}] \in M_{m,n}\,(X)$ są równe, gdy

$$a_{ij} = b_{ij} \ \text{ dla } \ i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.$$

Piszemy wtedy $A = B$.

Definicja 2.3 (Rodzaje macierzy)**.**

- Macierz $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}\,(X)$, gdzie $X = \mathbb{R}$ ($X = \mathbb{C}$) nazywamy **macierzą zerową**, jeżeli $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Oznaczamy ją przez $0_{m,n}$ lub po prostu przez 0, gdy wymiary macierzy są ustalone.
- Jeżeli $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}\,(X)$ i $m = n$, to A nazywamy **macierzą kwadratową**. Ciąg wyrazów $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ nazywamy **główną przekątną** macierzy A.

  Zakładamy dalej, że $A = [a_{ij}]$ jest rzeczywistą (zespoloną) macierzą kwadratową stopnia n.
- Macierz A, $n \geqslant 2$, nazywamy **macierzą trójkątną górną (dolną)**, gdy

  $$a_{ij} = 0 \ \text{ dla } \ i > j \ (i < j),$$

  czyli gdy pod (nad) główną przekątną są same zera, tzn.

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  lub

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
- Macierz A nazywamy **macierzą diagonalną**, gdy

  $$a_{ij} = 0 \ \text{ dla } \ i \neq j,$$

czyli gdy poza główną przekątną są same zera

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Jeśli przy tym $a_{ii} = 1$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, to A nazywamy **macierzą jednostkową** stopnia n i oznaczamy symbolem I_n

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

- Macierz A nazywamy **macierzą symetryczną**, gdy

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ dla } i > j,$$

czyli gdy wyrazy macierzy A leżą symetrycznie względem głównej przekątnej

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Macierz A nazywamy **macierzą antysymetryczną**, gdy

$$a_{ii} = 0 \text{ dla } i = 1, \dots, n \quad \text{oraz} \quad a_{ij} = -a_{ji} \text{ dla } i > j$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2. Operacje na macierzach

W tym paragrafie zajmiemy się jedynie macierzami nad ciałem K, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 2.4. Niech $A, B \in M_{m,n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.

- **Sumą macierzy** A i B nazywamy macierz $A + B \in M_{m,n}(K)$ taką, że

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ij} + b_{ij}] .$$

- Jeśli $\alpha \in K$, to **iloczynem macierzy** A **przez liczbę** α nazywamy macierz $\alpha A \in M_{m,n}(K)$ taką, że

$$\alpha A \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha a_{ij}] .$$

Twierdzenie 2.5. *Jeśli A, B, C są macierzami rzeczywistymi (zespolonymi) tego samego wymiaru, zaś α, β dowolnymi liczbami rzeczywistymi (zespolonymi), to*

1) $A + B = B + A$;

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3) $A + 0 = A$;

4) $A + (-A) = 0$, *gdzie* $-A = [-a_{ij}]$, *jeśli* $A = [a_{ij}]$;

5) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$;

6) $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$;

7) $\alpha (\beta B) = (\alpha\beta) B$;

8) $1A = A$.

Definicja 2.6. Jeżeli $A \in M_{m,r}$ i $B \in M_{r,n}$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, to **iloczynem macierzy** A i B nazywamy macierz $AB = [c_{ij}] \in M_{m,n}$, gdzie

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + ... + a_{ir} b_{rj} \quad \text{dla } i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.$$

Uwaga 2.7. Zauważmy, że iloczyn macierzy A i B powstaje w ten sposób, że wyraz c_{ij} jest równy iloczynowi skalarnemu (patrz def. 4.10) wektora $[a_{i1}, \dots, a_{ir}]$ przez wektor $[b_{1j}, \dots, b_{rj}]$.

Uwaga 2.8. Zamiast $\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ razy}}$ piszemy A^n.

Twierdzenie 2.9. *Dla dowolnych macierzy A, B, C rzeczywistych (zespolonych), przy założeniu że poniższe działania na macierzach są wykonalne, zachodzą równości:*

1) $A (B + C) = AB + AC$;

2) $(A + B) C = AC + BC$;

3) $\alpha (AB) = (\alpha A) B = A (\alpha B)$ *dla dowolnej liczby* α;

4) $A (BC) = (AB) C$;

5) $I_m A = A I_n = A$, *gdy* $A \in M_{m,n}$.

Uwaga 2.10. Mnożenie macierzy na ogół nie jest przemienne!

Definicja 2.11. Jeżeli $A \in M_{m,n}$, to macierzą **transponowaną** do A nazywamy macierz $A^T = [b_{ij}] \in M_{n,m}$, gdzie

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Transponowanie macierzy polega na zamianie kolejnych wierszy na kolumny.

Twierdzenie 2.12. *Jeśli A, B są dowolnymi macierzami rzeczywistymi (zespolonymi) oraz poniższe działania są wykonalne, to*

1) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ *dla dowolnej liczby* α;

3) $\left(A^T\right)^T = A$;

4) $(AB)^T = B^T A^T$;

5) *macierz kwadratowa A jest symetryczna (antysymetryczna) wtedy i tylko wtedy, gdy* $A^T = A$ $(A^T = -A)$.

2.3. Wyznacznik macierzy

Definicja 2.13. **Wyznacznikiem** macierzy kwadratowej A stopnia n, rzeczywistej lub zespolonej, nazywamy liczbę $\det A$ określoną następująco:

- gdy $n = 1$, $A = [a_{11}]$,
$$\det A \stackrel{\text{def}}{=} a_{11};$$
- gdy $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$,
$$\det A \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$
- gdy $n \geqslant 3$, to
$$\det A \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{1+1}\, a_{11}W_{11} + (-1)^{1+2}\, a_{12}W_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}\, a_{1n}W_{1n},$$
gdzie W_{1j} oznacza wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia $n-1$, powstałej z A przez skreślenie pierwszego wiersza i j-tej kolumny.

Jeżeli $A = [a_{ij}]$, to zapisujemy
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Uwaga 2.14. Do obliczania wyznacznika macierzy stopnia 3 (!) można użyć tzw. **metody Sarrusa**:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & \\
 & & & \searrow & & \swarrow & & & \\
 & & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & \\
 & & & \times & & \times & & & \\
 & & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & \\ \cline{3-7}
 & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & \\
- & & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & + \\
 & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & \\
- & & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & + \\
 & \swarrow & & & & & & \searrow & \\
- & & & & & & & & +
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{l}
(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) \\
-\,(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})
\end{array}$$

Twierdzenie 2.15 (Geometryczna interpretacja wyznacznika).

1) *Jeżeli* $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, *to* $|\det A|$ *jest równe polu powierzchni równoległoboku* D *rozpiętego na wierszach (kolumnach) macierzy* A. *W szczególności, jeśli* $\det A = 0$, *to wiersze (kolumny) są równoległe.*
$$|D| = \left|\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right|$$

2) *Jeżeli* $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, *to* $|\det A|$ *jest równe objętości równoległościanu* V *rozpiętego na wierszach (kolumnach) macierzy* A. *W szczególności, jeśli* $\det A = 0$, *to wiersze (kolumny) leżą w jednej płaszczyźnie.*
$$|V| = \left|\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right|$$

Twierdzenie 2.16 (Własności wyznacznika macierzy).

1) $\det A = \det A^T$, *tzn.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2) *Jeżeli pewien wiersz (kolumna) macierzy A składa się z samych zer, to* $\det A = 0$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

3) *Jeżeli macierz A ma dwa takie same wiersze (kolumny), to* $\det A = 0$.

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

4) *Jeżeli macierz A ma dwa proporcjonalne wiersze (kolumny), to* $\det A = 0$.

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta\alpha_1 & \beta\alpha_2 & \dots & \beta\alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

5) *Jeżeli macierz A jest trójkątna (dolna lub górna), to wyznacznik A jest równy iloczynowi elementów z głównej przekątnej, czyli*

$$\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

W szczególności $\det I_n = 1$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

6) *Jeżeli macierz B powstaje z A przez przestawienie dwóch dowolnych wierszy (kolumn), to*

$$\det B = -\det A.$$

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

7) *Jeżeli macierz B powstaje z A przez przemnożenie pewnego wiersza (kolumny) macierzy A przez liczbę α, to*
$$\det B = \alpha \det A.$$
W szczególności, jeśli A ma stopień n, to
$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \dots & \alpha a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

8) *Wyznacznik macierzy nie ulegnie zmianie, jeśli do pewnego wiersza (kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez dowolną liczbę α.*
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & \alpha a_{1i} + a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & \alpha a_{2i} + a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & \alpha a_{ni} + a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definicja 2.17. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$. **Dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} nazywamy liczbę
$$a_{ij}^* = (-1)^{i+j}\, W_{ij},$$
gdzie W_{ij} jest wyznacznikiem macierzy powstałej z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Twierdzenie 2.18 (Laplace'a o rozwijaniu wyznacznika względem wiersza lub kolumny). *Jeżeli A jest macierzą kwadratową stopnia n, $n \geqslant 2$, to dla dowolnych $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ zachodzą równości:*
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} a_{i_0 j}^* = a_{i_0 1} a_{i_0 1}^* + a_{i_0 2} a_{i_0 2}^* + \ldots + a_{i_0 n} a_{i_0 n}^* \qquad (\textit{rozwinięcie względem wiersza } i_0)$$
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i j_0} a_{i j_0}^* = a_{1 j_0} a_{1 j_0}^* + a_{2 j_0} a_{2 j_0}^* + \ldots + a_{n j_0} a_{n j_0}^* \qquad (\textit{rozwinięcie względem kolumny } j_0)$$

Twierdzenie 2.19 (Cauchy'ego). *Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to*
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

2.4. Macierz odwrotna

Definicja 2.20. Mówimy, że macierz kwadratowa A stopnia n jest **odwracalna**, jeżeli istnieje taka macierz B, że
$$AB = BA = I_n.$$
Taka macierz B jest jednoznacznie wyznaczona. Nazywamy ją **macierzą odwrotną** do A i oznaczamy symbolem A^{-1}. Zatem
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Definicja 2.21. Macierz kwadratową A nazywamy **nieosobliwą**, jeżeli

$$\det A \neq 0;$$

w przeciwnym wypadku A nazywamy **macierzą osobliwą**.

Zauważmy, że jeśli A jest odwracalna, to jest nieosobliwa, przy czym $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Istotnie

$$1 = \det I_n = \det \left(AA^{-1}\right) = \det A \cdot \det A^{-1}$$

i stąd

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Zachodzi też fakt odwrotny: jeśli macierz A jest nieosobliwa, to jest odwracalna. Dostajemy więc

Twierdzenie 2.22. *Macierz kwadratowa A jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy jest odwracalna. Ponadto jeśli $\det A \neq 0$, to*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left[a_{ij}^*\right]^T,$$

gdzie $\left[a_{ij}^*\right]$ oznacza macierz dopełnień algebraicznych wyrazów macierzy A.

Twierdzenie 2.23 (Własności macierzy odwrotnej). *Jeżeli A i B są macierzami nieosobliwymi tego samego stopnia, to*

1) $\det \left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$;
2) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$;
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
4) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
5) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$ *dla dowolnej liczby* $\alpha \neq 0$.

Niech $GL(n, \mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich rzeczywistych macierzy nieosobliwych stopnia n. Z własności podanych w twierdzeniach 2.9 i 2.23 łatwo wynika, że zbiór ten wraz z mnożeniem macierzy i macierzą jednostkową I_n jest grupą. Nazywamy ją **pełną grupą liniową**. Jeżeli $n \geqslant 2$, to jest to grupa nieabelowa. Analogicznie określamy grupę $GL(n, \mathbb{C})$.

2.5. Równoważna definicja wyznacznika

Na koniec tego rozdziału przedstawiamy inną definicję wyznacznika, równoważną definicji 2.13. Przypomnijmy, że definicja 2.13 ma charakter rekurencyjny — podaje ona prostą metodę obliczania wyznaczników opartą na rozwinięciu Laplace'a. Natomiast definicja 2.24 wprowadza pojęcie wyznacznika za pomocą permutacji. Przy dużym stopniu macierzy jest ona mało przydatna do obliczeń; głównie wykorzystywana jest do przeprowadzania dowodów własności wyznaczników.

Definicja 2.24. Niech $P(n) = \{1, \ldots, n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. n-elementową **permutacją** nazywamy każde wzajemnie jednoznaczne odwozorowanie $\sigma : P(n) \to P(n)$. Permutację σ zapisujemy w postaci

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \end{pmatrix}.$$

Zbiór wszystkich n-elementowych permutacji oznaczamy symbolem $S(n)$.

Twierdzenie 2.25. *Jest $n!$ n-elementowych permutacji. Zbiór $S(n)$ wraz ze składaniem odwzorowań i permutacją identycznościową jest grupą (dla $n > 2$ jest to grupa nieabelowa).*

Definicja 2.26. Niech dana będzie permutacja σ.

- Mówimy, że para (i, j) tworzy **inwersję** (nieporządek) permutacji σ, gdy
$$i < j \quad \text{oraz} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$
- **Znakiem permutacji** σ nazywamy liczbę $(-1)^k$, gdzie k oznacza liczbę inwersji permutacji σ. Znak σ oznaczamy symbolem $\operatorname{sgn}\sigma$.

Twierdzenie 2.27. *Jeżeli σ i τ są permutacjami n-elementowymi, to*
$$\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}\tau \cdot \operatorname{sgn}\sigma$$
($\circ$ oznacza tutaj złożenie odwzorowań).

Definicja 2.28. Niech A będzie kwadratową macierzą rzeczywistą (zespoloną) stopnia n. **Wyznacznikiem** macierzy A nazywamy liczbę
$$\det A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n}.$$

3. Układy równań liniowych

3.1. Podstawowe definicje

Definicja 3.1. Niech $m, n \in \mathbb{N}$.

- **Układem m równań liniowych** z n niewiadomymi $x_1, ..., x_n$ nazywamy każdy układ równań postaci
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{$*$}$$
gdzie współczynniki a_{ij}, b_i, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, są ustalonymi liczbami rzeczywistymi (zespolonymi).
- **Rozwiązaniem układu równań liniowych** $(*)$ nazywamy każdy ciąg $(x_1, ..., x_n)$ liczb rzeczywistych (zespolonych) spełniający ten układ.

Definicja 3.2. Mówimy, że układ równań $(*)$ jest

- **sprzeczny**, gdy nie ma rozwiązań,
- **oznaczony**, gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **nieoznaczony**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Łatwo sprawdzić, że układ równań $(*)$ można zapisać w tzw. **postaci macierzowej**
$$AX = B, \tag{$**$}$$
gdzie
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$
Macierz A nazywamy **macierzą układu** $(*)$, zaś macierz B — **kolumną wyrazów wolnych**.

Definicja 3.3. Układ równań liniowych postaci
$$AX = 0$$
nazywamy **układem jednorodnym**.

Uwaga 3.4. Jednym z rozwiązań układu jednorodnego jest rozwiązanie zerowe postaci

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3.2. Twierdzenie Cramera

Definicja 3.5. Niech $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n,n}$ oraz $B \in M_{n,1}$. **Układem równań Cramera** nazywamy układ

$$AX = B,$$

w którym A jest macierzą nieosobliwą.

Twierdzenie 3.6 (Cramera). *Układ równań Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie*

$$X = \frac{1}{W} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix},$$

gdzie $W = \det A$ *oraz* W_j, $j = 1, \ldots, n$, *oznacza wyznacznik macierzy, która powstaje przez zastąpienie* j*-tej kolumny macierzy* A *kolumną wyrazów wolnych, tzn.*

$$W_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \ldots & \end{vmatrix}.$$

Wniosek 3.7. *Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie zerowe.*

Uwaga 3.8. Jeżeli

$$AX = B$$

jest układem Cramera, to

$$X = A^{-1}B.$$

3.3. Rząd macierzy i twierdzenie Kroneckera-Cappellego

Definicja 3.9. Niech $m, n, r \in \mathbb{N}$ oraz $r \leqslant \min\{m, n\}$. **Minorem stopnia** r macierzy $A \in M_{m,n}$ nazywamy wyznacznik macierzy powstałej z macierzy A poprzez skreślenie pewnej ilości wierszy i/lub kolumn. W szczególności, jeśli A jest macierzą kwadratową stopnia n, to $\det A$ jest jej minorem stopnia n.

Definicja 3.10. **Rzędem macierzy** $A \in M_{m,n}$ nazywamy najwyższy ze stopni niezerowych minorów macierzy A. Rząd macierzy A oznaczamy przez $R(A)$.

Twierdzenie 3.11 (Własności rzędu macierzy). *Niech* $A \in M_{m,n}$.

1) $0 \leqslant R(A) \leqslant \min\{m, n\}$, *przy czym* $R(A) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* A *jest macierzą zerową.*
2) *Jeżeli* A *jest macierzą kwadratową stopnia* n, *to*

$$R(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0.$$

3) *Jeżeli macierz* D *powstaje z macierzy* A *poprzez*
   - *transponowanie,*

- *skreślenie zerowego wiersza (kolumny),*
- *skreślenie jednego z dwóch identycznych wierszy (kolumn),*
- *skreślenie jednego z dwóch proporcjonalnych wierszy (kolumn),*
- *zamianę dwóch dowolnych wierszy (kolumn),*
- *dodanie do pewnego wiersza (kolumny) macierzy A innego wiersza (kolumny) pomnożonego przez pewną liczbę,*

to $R(D) = R(A)$.

Definicja 3.12. **Macierzą uzupełnioną** układu
$$AX = B$$
nazywamy macierz
$$U \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$
którą też krótko zapisujemy w postaci $U = [A|B]$.

Twierdzenie 3.13 (Kroneckera-Cappellego). *Układ m równań z n niewiadomymi postaci*
$$AX = B$$
ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy
$$R(A) = R(U).$$
Wówczas rozwiązania układu zależą od $n - r$ parametrów, gdzie $r = R(A) = R(U)$. W szczególności, jeśli $r = n$, to układ posiada jedno rozwiązanie.

4. Geometria analityczna w $\mathbb{R}^3$

4.1. Wektory

Definicja 4.1. **Przestrzenią** $\mathbb{R}^3$ nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych, tzn.
$$\mathbb{R}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y \in \mathbb{R} \ \wedge \ z \in \mathbb{R}\}.$$

Elementy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ będziemy, w zależności od potrzeby, geometrycznie traktować jako:

- **punkty**
  (wówczas będziemy je oznaczać przez $A, B, P, Q, (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$ itd.),
- **wektory** zaczepione w punkcie $(0, 0, 0)$
  (w tym przypadku stosujemy oznaczenia $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$, $[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$ itd.),
- **wektory swobodne**.

Elementy przestrzeni $\mathbb{R}$ będziemy nazywać **skalarami**.

Definicja 4.2.

- Wektor $\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} [0, 0, 0]$ nazywamy **wektorem zerowym**.
- Wektory:
$$\mathbf{i} \stackrel{\text{def}}{=} [1, 0, 0], \quad \mathbf{j} \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1, 0], \quad \mathbf{k} \stackrel{\text{def}}{=} [0, 0, 1],$$
  nazywamy **wersorami** odpowiednio na osiach Ox, Oy i Oz.

Definicja 4.3. Niech $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$. Wówczas

- liczbę
$$|\mathbf{a}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
nazywamy **długością wektora a**,
- wektor
$$-\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} [-a_1, -a_2, -a_3]$$
nazywamy **wektorem przeciwnym** do wektora **a**.

Uwaga 4.4. Mówimy, że wektory $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ są **równe**, gdy $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ oraz $a_3 = b_3$.

Definicja 4.5 (Działania na wektorach)**.** Niech $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3] \in \mathbb{R}^3$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **Sumą wektorów a i b** nazywamy wektor określony wzorem:
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3].$$
- **Iloczynem wektora a przez skalar** α nazywamy wektor określony wzorem:
$$\alpha\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3].$$
W szczególności mamy: $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Definicja 4.6. Mówimy, że wektory **a** i **b** są **równoległe** (**współliniowe**), gdy istnieje liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ taka, że $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$.

Uwaga 4.7. Każdy wektor $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy wektorów
$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$
Wektory te nazywamy **składowymi wektora a**.

Uwaga 4.8. Kątami kierunkowymi wektora $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] \neq \mathbf{0}$ nazywamy kąty φ_1, φ_2, φ_3, jakie wektor **a** tworzy odpowiednio z osiami Ox, Oy i Oz. Kosinusy tych kątów określone wzorami:
$$\cos\varphi_i = \frac{a_i}{|\mathbf{a}|} \qquad \text{dla } i = 1, 2, 3,$$
nazywamy **kosinusami kierunkowymi wektora a**.

Łatwo sprawdzić, że
$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1.$$

Twierdzenie 4.9 (Własności działań na wektorach). *Dla dowolnych* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *oraz* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *mamy*:

1) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (*łączność*);
2) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (*przemienność*);
3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ (*wektor zerowy jest elementem neutralnym dodawania*);
4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ (*istnienie elementu przeciwnego*);
5) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$;
6) $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$;
7) $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$;
8) $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$.

Definicja 4.10. Niech $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3] \in \mathbb{R}^3$. **Iloczynem skalarnym** wektorów **a** i **b** nazywamy liczbę $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ określoną wzorem:
$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Uwaga 4.11. W analogiczny sposób można wprowadzić pojęcie iloczynu skalarnego wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

$$[a_1, ..., a_n] \circ [b_1, ..., b_n] \overset{\text{def}}{=} a_1 b_1 + ... + a_n b_n.$$

Twierdzenie 4.12 (Własności iloczynu skalarnego). *Dla dowolnych* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *oraz* $\alpha \in \mathbb{R}$ *mamy:*

1) $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}$ *(przemienność)*;
2) $(\alpha\mathbf{a}) \circ \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})$
   $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \mathbf{c}$ *(dwuliniowość)*;
3) $\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, *a stąd* $(\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} = \mathbf{0})$;
4)
$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$
   gdzie $\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *jest kątem między wektorami* $\mathbf{a}$ *i* $\mathbf{b}$ *(przyjmujemy dodatkowo, że kątem między wektorem zerowym a dowolnym wektorem* $\mathbf{a}$ *jest dowolna liczba z przedziału* $[0, \pi]$*)*;
5) $|\mathbf{a} \circ \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$;
6) $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Definicja 4.13. Niech $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3] \in \mathbb{R}^3$. **Iloczynem wektorowym** wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nazywamy wektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ określony wzorem:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Uwaga 4.14. Lewą stronę powyższego wzoru można łatwo zapamiętać w postaci "wyznacznika": $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

Uwaga 4.15. Orientacja wektorów: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych $Oxyz$.

Twierdzenie 4.16 (Własności iloczynu wektorowego). *Dla dowolnych* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *oraz* $\alpha \in \mathbb{R}$ *mamy:*

1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$;
2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ *oraz* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$;
3) $(\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
   $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ *(dwuliniowość)*;
4)
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$
   tzn. długość wektora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach* $\mathbf{a}$ *i* $\mathbf{b}$;
5) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Definicja 4.17. Niech $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. **Iloczynem mieszanym** wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ nazywamy liczbę $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ określoną wzorem:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \overset{\text{def}}{=} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c}.$$

Twierdzenie 4.18 (Własności iloczynu mieszanego). *Dla dowolnych* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *mamy:*

1) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = \mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$;
   $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \circ \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \circ \mathbf{b}$;
2) *jeśli* $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *oraz* $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]$, *to*
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

3) (***interpretacja geometryczna***) *objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach* **a**, **b** *i* **c** *równa jest modułowi iloczynu mieszanego* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c}$ (*por. tw. 2.15*).

4.2. Płaszczyzna

Równania parametryczne płaszczyzny

Niech π będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i rozpiętą na niewspółliniowych wektorach $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$. Wówczas dowolny punkt $P = (x, y, z)$ należący do płaszczyzny π można zapisać w postaci:

$$P = P_0 + s\mathbf{a} + t\mathbf{b},$$

gdzie $s, t \in \mathbb{R}$. W formie rozwiniętej otrzymujemy tzw. **równania parametryczne płaszczyzny**:

$$\pi : \quad \begin{cases} x = x_0 + sa_1 + tb_1, \\ y = y_0 + sa_2 + tb_2, \\ z = z_0 + sa_3 + tb_3, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Równanie ogólne płaszczyzny

Niech π będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt P_0 i rozpiętą na niewspółliniowych wektorach **a** i **b**. Wówczas dla dowolnego $(x, y, z) \in \pi$ mamy $[x - x_0, y - y_0, z - z_0] \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, a zatem

$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] \circ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

Wektor $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ nazywamy **wektorem normalnym płaszczyzny** π. Jeśli przyjmiemy, że $\mathbf{n} = [A, B, C] \neq \mathbf{0}$, to powyższe równanie przyjmuje postać:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Dodatkowo przyjmując , że $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, otrzymujemy **równanie ogólne płaszczyzny**:

$$\pi : \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Równanie odcinkowe płaszczyzny

Każdą płaszczyznę przecinającą osie układu $Oxyz$ w punktach: $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, można opisać równaniem:

$$\pi : \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty

Jeśli płaszczyzna π zawiera trzy niewspółliniowe punkty:

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1), \ P_2 = (x_2, y_2, z_2), \ P_3 = (x_3, y_3, z_3),$$

to równanie ją opisujące przyjmuje postać:

$$\pi : \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Twierdzenie 4.19. *Odległość punktu* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *od płaszczyzny* π *opisanej równaniem* $Ax + By + Cz + D = 0$ *wyraża się wzorem:*

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Definicja 4.20. **Pękiem plaszczyzn** wyznaczonym przez dwie nierównoległe płaszczyzny π_1 i π_2 nazywamy zbiór wszystkich płaszczyzn zawierających prostą będącą cześcią wspólną π_1 i π_2.

Twierdzenie 4.21. *Niech π_1 i π_2 będą dowolnymi nierównoległymi płaszczyznami o równaniach:*

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Wówczas prosta π należy do pęku płaszczyzn wyznaczonego przez π_1 i π_2 wtedy i tylko wtedy, gdy płaszczyzna π jest opisana równaniem:

$$\pi : \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

gdzie λ_1, λ_2 są pewnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$.

4.3. Prosta

Równania parametryczne prostej

Niech l będzie prostą przechodzącą przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległą do wektora $\mathbf{r} = [a, b, c] \neq \mathbf{0}$. Wówczas dowolny punkt $P = (x, y, z)$ należący do prostej l można zapisać w postaci:

$$P = P_0 + t\mathbf{r},$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$. W formie rozwiniętej otrzymujemy tzw. **równania parametryczne prostej**:

$$l : \begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \\ z = z_0 + tc, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Równania kierunkowe prostej

Równania prostej wyznaczonej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i wektor $\mathbf{r} = [a, b, c]$ taki, że $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, można przekształcić otrzymując **równania kierunkowe prostej**:

$$l : \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Równania krawędziowe prostej

Prostą l będącą częścią wspólną dwóch nierównoległych płaszczyzn o równaniach:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

będziemy opisywać w następujący sposób:

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

W tym przypadku prosta l jest równoległa do wektora $\mathbf{r}$, gdzie $\mathbf{r} = [A_1, B_1, C_1] \times [A_2, B_2, C_2]$.

4.4. Wzajemne położenie prostych i płaszczyzn

Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn

Niech dane będą płaszczyzny π_1 i π_2 opisane równaniami:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Wówczas mamy:

- $\pi_1 \parallel \pi_2 \;\Leftrightarrow\; [A_1, B_1, C_1] \parallel [A_2, B_2, C_2]$;
- $\pi_1 \perp \pi_2 \;\Leftrightarrow\; [A_1, B_1, C_1] \perp [A_2, B_2, C_2]$.

Ponadto układ równań
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$
posiada następującą interpretację geometryczną:

układ równań $(*)$	wzajemne położenie płaszyzn π_1 i π_2
sprzeczny	$\pi_1 \parallel \pi_2$ i $\pi_1 \neq \pi_2$
nieoznaczony (rozwiązania zależą od jednego parametru)	płaszczyzny przecinają się wzdłuż pewnej prostej
nieoznaczony (rozwiązania zależą od dwóch parametrów)	$\pi_1 = \pi_2$

Wzajemne położenie dwóch prostych

Niech dane będą proste l_1 i l_2 opisane równaniami:
$$l_1 : \begin{cases} x = x_1 + ta_1, \\ y = y_1 + tb_1, \\ z = z_1 + tc_1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad l_2 : \begin{cases} x = x_2 + sa_2, \\ y = y_2 + sb_2, \\ z = z_2 + sc_2, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$
Wówczas mamy:
- $l_1 \parallel l_2 \;\Leftrightarrow\; [a_1, b_1, c_1] \parallel [a_2, b_2, c_2]$;
- $l_1 \perp l_2 \;\Leftrightarrow\; [a_1, b_1, c_1] \perp [a_2, b_2, c_2]$.

Jeśli proste l_1 i l_2 nie są równoległe i nie mają punktu wspólnego, to mówimy, że są to **proste skośne**.

Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny

Niech dane będą: płaszczyzna π i prosta l, opisane równaniami:
$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0, \qquad l : \begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \\ z = z_0 + tc, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$
Wówczas mamy:
- $\pi \parallel l \;\Leftrightarrow\; [A, B, C] \perp [a, b, c]$;
- $\pi \perp l \;\Leftrightarrow\; [A, B, C] \parallel [a, b, c]$.

5. Przestrzenie wektorowe i przekształcenia liniowe

5.1. Podstawowe definicje i własności

Definicja 5.1. **Przestrzenią wektorową** (**liniową**) X nad ciałem K nazywamy zbiór X taki, że
- X jest grupą abelową, tzn. dane jest działanie:
$$+ : X \times X \to X, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x} + \mathbf{y})$$
oraz wyróżniony element $\mathbf{0} \in X$ takie, że
  a) $\bigwedge_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in X} \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$,
  b) $\bigwedge_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in X} \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,

c) $\bigwedge_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$,
d) $\bigwedge_{\mathbf{x}\in X} \bigvee_{\mathbf{y}\in X} \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$,

- dane jest odwzorowanie

$$\cdot\ : K\times X\to X, \quad (\lambda,\mathbf{x})\mapsto \lambda\mathbf{x}$$

takie, że
e) $\bigwedge_{\alpha,\beta\in K} \bigwedge_{\mathbf{x}\in X} (\alpha\beta)\,\mathbf{x}=\alpha\,(\beta\mathbf{x})$,
f) $\bigwedge_{\alpha,\beta\in K} \bigwedge_{\mathbf{x}\in X} (\alpha+\beta)\,\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$,
g) $\bigwedge_{\alpha\in K} \bigwedge_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in X} \alpha\,(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$,
h) $\bigwedge_{\mathbf{x}\in X} 1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

K nazywamy ciałem współczynników przestrzeni X, a jego elementy nazywamy **skalarami**. Elementy zbioru X nazywamy **wektorami**.

Twierdzenie 5.2. *Jeżeli X jest przestrzenią wektorową nad ciałem K, to*

1) $\bigwedge_{\mathbf{x}\in X} 0\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$.
2) $\bigwedge_{\alpha\in K} \alpha\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$.
3) $\bigwedge_{\mathbf{x}\in X} (-1)\cdot\mathbf{x}=-\mathbf{x}$.
4) $\bigwedge_{\alpha,\beta\in K} \bigwedge_{\mathbf{x}\in X} (\alpha-\beta)\,\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+(-\beta)\,\mathbf{x}$.

Uwaga 5.3. Jeśli w przestrzeni wektorowej X nad ciałem K oprócz dodawania, mamy dodatkowo określone drugie działanie $\circ : X\times X\to X$ i działanie to jest łączne oraz rozdzielne względem dodawania, to X nazywamy **algebrą nad ciałem** K. Przykładem algebry nad ciałem $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) jest zbiór rzeczywistych (zespolonych) macierzy kwadratowych z dodawaniem i mnożeniem macierzy.

5.2. Liniowa zależność i liniowa niezależność

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K.

Definicja 5.4.

- Niech $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ będą wektorami z przestrzeni X. Wektor $\mathbf{x}\in X$ nazywamy **kombinacją liniową wektorów** $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$, jeżeli

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{x}_i=\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{x}_n,$$

gdzie $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in K$. Skalary $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ nazywamy **współczynnikami** tej **kombinacji** liniowej. Jeśli co najmniej jeden współczynnik kombinacji jest różny od zera, to mówimy, że jest to **nietrywialna kombinacja liniowa**; w przeciwnym wypadku nazywamy ją trywialną.

- Niech S będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni X. Mówimy, że wektor $\mathbf{x}\in X$ jest **kombinacją liniową wektorów ze zbioru** S, jeżeli istnieją wektory $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\in S$ takie, że $\mathbf{x}$ jest kombinacją liniową tych wektorów. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektrów z S oznaczamy przez $\mathrm{lin}(S)$. Podzbiór S nazywamy **układem generatorów** (**zbiorem generatorów**) przestrzeni X, jeżeli $X=\mathrm{lin}(S)$, tzn. każdy wektor z przestrzeni X jest kombinacją liniową wektorów ze zbioru S.

Definicja 5.5. Niech $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ będą wektorami z przestrzeni X.

- Mówimy, że **skończony zbiór wektorów** $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ **jest liniowo zależny**, jeżeli wektor zerowy jest nietrywialną kombinacją liniową tych wektorów, tzn.
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0},$$
gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ oraz co najmniej jeden ze współczynników kombinacji jest niezerowy.
- Mówimy, że **skończony zbiór wektorów** $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ **jest liniowo niezależny**, jeżeli nie jest liniowo zależny, tzn. z równości:
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0},$$
gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, wynika, że $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Definicja 5.6. Niech S będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni wektorowej X. Mówimy, że **zbiór** S **jest liniowo zależny**, jeżeli ma skończony liniowo zależny podzbiór oraz, że **zbiór** S **jest liniowo niezależny**, jeżeli nie jest liniowo zależny.

Twierdzenie 5.7 (Własności zbiorów liniowo zależnych i niezależnych). *Niech S będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni wektorowej X.*

1) *Jeżeli $\mathbf{0} \in S$, to S jest zbiorem liniowo zależnym.*
2) *Każdy podzbiór zbioru liniowo niezależnego jest liniowo niezależny.*
3) *Każdy nadzbiór zbioru liniowo zależnego jest liniowo zależny.*
4) *Zbiór S jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien wektor $\mathbf{x} \in S$ jest kombinacją liniową wektorów ze zbioru $S \setminus \{\mathbf{x}\}$.*
5) *Zbiór S jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor $\mathbf{x} \in X$ można przedstawić w co najwyżej jeden sposób jako kombinację liniową wektorów ze zbioru S.*

Twierdzenie 5.8. *Rząd macierzy o wyrazach rzeczywistych (zespolonych) jest równy maksymalnej ilości liniowo niezależnych wierszy (kolumn) tej macierzy traktowanych jako wektory.*

Wniosek 5.9. *Wektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, gdzie $k \leqslant n$, są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy, której wierszami (kolumnami) są wektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, jest równy k.*

5.3. Baza i wymiar

Definicja 5.10. Zbiór $B \subset X$ nazywamy **bazą przestrzeni wektorowej** X, jeżeli B jest zbiorem liniowo niezależnym i B generuje przestrzeń X. Oznacza to, że dowolny wektor $\mathbf{x} \in X$ można jednoznacznie przedstawić w postaci
$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n$$
dla pewnych skalarów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ oraz wektorów $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in B$. Współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nazywamy **współrzędnymi wektora x względem bazy** B.

Twierdzenie 5.11. *Każda nietrywialna przestrzeń wektorowa X ma bazę. Jeżeli przestrzeń X ma n-elementową bazę, gdzie $n \in \mathbb{N}$, to każda baza przestrzeni X składa się z n elementów. Jeżeli X ma nieskończoną bazę, to każda baza X jest nieskończona.*

Definicja 5.12. Jeżeli X ma skończoną n-elementową bazę, to liczbę n nazywamy **wymiarem przestrzeni** X i piszemy $\dim X = n$. Dodatkowo przyjmujemy, że jeżeli $X = \{\mathbf{0}\}$ jest przestrzenią trywialną, to $\dim X = 0$, a jeśli X nie ma skończonej bazy, to piszemy $\dim X = \infty$.

Twierdzenie 5.13. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Następujące warunki są sobie równoważne:*

1) *wektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$;*
2) *wektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{R}^n$;*
3) $\det [x_{ij}] \neq 0$, *gdzie* $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

5.4. Podprzestrzenie

Definicja 5.14. Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K z ustalonym działaniem $+$. Niepusty podzbiór $X_1 \subset X$ nazywamy **podprzestrzenią** przestrzeni X, jeżeli X_1 (z działaniem $+$) jest również przestrzenią wektorową nad ciałem K.

Twierdzenie 5.15. *Niepusty podzbiór $X_1 \subset X$ jest podprzestrzenią przestrzeni X nad ciałem K, jeżeli spełnione są warunki:*

a) $\bigwedge\limits_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in X_1} \mathbf{x} + \mathbf{y} \in X_1$,
b) $\bigwedge\limits_{\mathbf{x} \in X_1} \bigwedge\limits_{\alpha \in K} \alpha \mathbf{x} \in X_1$.

Twierdzenie 5.16. *Jeżeli X_1 jest podprzestrzenią przestrzeni X nad ciałem K, to*

$$\dim_K X_1 \leqslant \dim_K X.$$

5.5. Przekształcenia liniowe

Definicja 5.17. Niech X i Y będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Odwzorowanie $\varphi : X \to Y$ nazywamy **przekształceniem liniowym**, jeżeli spełnione są warunki:

1) $\bigwedge\limits_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in X} \varphi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \varphi(\mathbf{x}_1) + \varphi(\mathbf{x}_2)$ (addytywność),
2) $\bigwedge\limits_{\mathbf{x} \in X} \bigwedge\limits_{\alpha \in K} \varphi(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \varphi(\mathbf{x})$ (jednorodność).

Jeżeli $Y = K$, to odwzorowanie φ nazywamy **funkcjonałem liniowym**.

Twierdzenie 5.18. *Jeżeli $\varphi : X \to Y$ jest przekształceniem liniowym, to*

1) $\varphi(\mathbf{0}_X) = \mathbf{0}_Y$, *gdzie $\mathbf{0}_X, \mathbf{0}_Y$ oznaczają odpowiednio wektory zerowe w przestrzeniach X i Y;*
2) $\bigwedge\limits_{\mathbf{x} \in X} \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x})$;
3) $\bigwedge\limits_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in X} \bigwedge\limits_{\alpha_1,\alpha_2 \in K} \varphi(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 \varphi(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 \varphi(\mathbf{x}_2)$.

Uwaga 5.19. Znana ze szkoły funkcja liniowa określona wzorem: $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbb{R}$, nie musi być przekształceniem liniowym w sensie definicji 5.17. Jeśli bowiem $b \neq 0$, to $f(0) \neq 0$, co pozostaje w sprzeczności z twierdzeniem 5.18.1). Można łatwo wykazać, że funkcja liniowa jest przekształceniem liniowym (a dokładniej, funkcjonałem liniowym) wtedy i tylko wtedy, gdy $b = 0$.

Twierdzenie 5.20. *Niech X, Y, Z będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K.*

1) *Jeżeli $\varphi_1, \varphi_2 : X \to Y$ są przekształceniami liniowymi oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, to odwzorowanie $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2$ jest przekształceniem liniowym.*
2) *Jeżeli $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ są przekształceniami liniowymi, to złożenie $\psi \circ \varphi : X \to Z$ jest przekształceniem liniowym.*

5.6. Macierz przekształcenia liniowego

Niech X i Y będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Załóżmy, że $\dim X = n$, $\dim Y = m$ oraz $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ jest bazą przestrzeni X, zaś $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ — bazą przestrzeni Y. Niech $\varphi : X \to Y$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas dla każdego $j = 1, \ldots, n$ istnieją współczynniki $\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj}$ takie, że

$$\varphi(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \mathbf{y}_i.$$

W ten sposób odwzorowanie φ wyznacza macierz $[\alpha_{ij}]$ wymiarów $m \times n$. Będziemy ją oznaczać przez $M(\varphi)$. Jest to tzw. **macierz przekształcenia liniowego** φ przy ustalonych bazach przestrzeni X i Y.

Odwrotnie, jeśli dana jest pewna macierz $M = [\alpha_{ij}]$ wymiarów $m \times n$, to odwzorowanie

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \right) y_i \quad \text{dla } \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathbf{x}_j$$

jest przekształceniem liniowym, przy czym $M(\varphi) = M$.

Twierdzenie 5.21. *Niech X, Y, Z będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$, z ustalonymi bazami.*

1) *Jeśli $\varphi_1, \varphi_2 : X \to Y$ są przekształceniami liniowymi oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, to macierzą przekształcenia liniowego $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$ jest macierz $\alpha_1 M(\varphi_1) + \alpha_2 M(\varphi_2)$, tzn.*
$$M(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 M(\varphi_1) + \alpha_2 M(\varphi_2).$$
2) *Jeśli $\varphi : X \to Y$ i $\psi : Y \to Z$ są przekształceniami liniowymi, to macierzą złożenia $\psi \circ \varphi$ jest macierz $M(\psi) \cdot M(\varphi)$, tzn.*
$$M(\psi \circ \varphi) = M(\psi) \cdot M(\varphi).$$

Załóżmy dalej, że $\dim X = n$ i dane są dwie bazy przestrzeni X: $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ i $\{\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_n\}$. Wówczas dowolny wektor $\mathbf{x}'_j$, $j = 1, \ldots, n$, można jednoznacznie zapisać w postaci

$$\mathbf{x}'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \mathbf{x}_i.$$

Macierz kwadratową $A = [\alpha_{ij}]$ nazywamy **macierzą przejścia** od bazy $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ do bazy $\{\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_n\}$.

Twierdzenie 5.22.

1) *Macierz przejścia A jest macierzą nieosobliwą.*
2) *Macierzą przejścia od bazy $\{\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_n\}$ do bazy $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ jest macierz A^{-1}.*

Twierdzenie 5.23. *Dla $\mathbf{x} \in X$ oznaczmy przez $\xi_1, \ldots, \xi_n$ współrzędne wektora $\mathbf{x}$ w bazie $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ oraz przez $\xi'_1, \ldots, \xi'_n$ współrzędne $\mathbf{x}$ w bazie $\{\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_n\}$, tzn. niech*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{x}_i \quad \textit{oraz} \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i \mathbf{x}'_i.$$

Wówczas dla $i = 1, \ldots, n$ mamy

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi'_j,$$

co w postaci macierzowej można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{bmatrix}.$$

Niech $\dim Y = m$ i niech B oznacza macierz przejścia od bazy $\{y_1, \ldots, y_m\}$ do bazy $\{y'_1, \ldots, y'_m\}$ przestrzeni Y.

Twierdzenie 5.24. *Niech $\varphi : X \to Y$ będzie przekształceniem liniowym i niech $M(\varphi)$ oznacza macierz przekształcenia φ w bazach $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ oraz $M'(\varphi)$ — macierz przekształcenia φ w bazach $\{\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_n\}$, $\{\mathbf{y}'_1, \ldots, \mathbf{y}'_m\}$. Wówczas*

$$M'(\varphi) = B^{-1} M(\varphi) A.$$

5.7. Wektory własne i wartości własne przekształcenia liniowego

Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 5.25. Jeżeli $\varphi : X \to X$ jest odprzekształceniem liniowym, to wektor $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ nazywamy **wektorem własnym przekształcenia** φ, jeżeli istnieje skalar $\lambda \in K$ taki, że

$$\varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

Skalar λ nazywamy **wartością własną odwzorowania** φ. W tym przypadku mówimy, że $\mathbf{x}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ.

Definicja 5.26. Niech $A \in M_{n,n}(K)$. **Wartością własną macierzy** A nazywamy liczbę $\lambda \in K$ taką, że

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Powyższe równanie nazywamy **równaniem charakterystycznym** macierzy A ($\det(A - \lambda I)$ jest wielomianem stopnia n zmiennej λ).

Twierdzenie 5.27. *Każda macierz zespolona ma wartości własne.*

Twierdzenie 5.28. *Liczba $\lambda \in K$ jest wartością własną przekształcenia φ wtedy i tylko wtedy, gdy λ jest wartością własną macierzy $M(\varphi)$.*

Twierdzenie 5.29 (Cayleya-Hamiltona). *Każda macierz kwadratowa rzeczywista lub zespolona A jest pierwiastkiem swojego wielomianu charakterystycznego, tzn.*

$$W(A) = 0, \quad \text{gdzie} \;\; W(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$