MATEMATYKA

Pod redakcją Andrzeja Justa i Andrzeja Piątkowskiego

Internetowy kurs dla kandydatów na Politechnikę Łódzką
Repetytorium dla studentów I roku Politechniki Łódzkiej

Skrypt niniejszy zawiera wiadomości z analizy matematycznej i obejmuje swoim zakresem program nowej matury na rozszerzonym poziomie. W związku z tym może być przydatny dla studentów politechniki, którzy zostali przyjęci na studia po zdaniu matematyki tylko na poziomie podstawowym. Dla studentów tych będzie stanowił dobre uzupełnienie programu realizowanego na pierwszym roku studiów. Uczniom klas maturalnych pozwoli przygotować się do matury i studiów na naszej uczelni i ocenić stan swej wiedzy z zakresu matematyki.

Skrypt został napisany przez pracowników Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej. Autorami poszczególnych rozdziałów są:

Rozdział 1: Andrzej Piątkowski;

Rozdział 2: Andrzej Piątkowski (redaktor rozdziału), Konrad Grzegorczyk, Sławomir Jagodziński, Izabela Jóźwik, Anna Olek, Dorian Szymczak;

Rozdział 3: Agnieszka Zawadzka (redaktor rozdziału) Ewa Czkwianianc, Hanna Drabik, Jadwiga Kicińska-Słaby, Dorota Rogowska;

Rozdział 4: Andrzej Piątkowski (redaktor rozdziału), Krzysztof Lisiecki, Monika Potyrała;

Rozdział 5: Marek Małolepszy (redaktor rozdziału), Grzegorz Kariozen, Wiesław Majchrzak, Magdalena Nockowska, Anna Woźniakowska;

Rozdział 6: Andrzej Piątkowski (redaktor rozdziału), Agnieszka Kubiś-Lipowska, Adam Lipowski, Joanna Peredko, Anna Waliszewska.

Całość graficznie i technicznie opracował Witold Walas.

Końcowej korekty skryptu dokonał zespół w składzie: Jerzy Bienias, Monika Lindner, Wanda Lindner, Maria Sielska, Ryszard Sielski i Zbigniew Wysocki.

Spis treści

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

1.1 Logika

1.1.1 Zdania, tautologie

Logika jest nauką zajmującą się zdaniami. Z punktu widzenia logiki istotne jest, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy nie. Nie jest natomiast istotne o czym to zdanie mówi.

Definicja 1.1 *Zdaniem w sensie logiki nazywać będziemy każdą wypowiedź, o której da się powiedzieć, czy jest prawdziwa, czy fałszywa (inaczej: której da się przyporządkować jedną z dwu wartości logicznych: prawdę lub fałsz).*

Z definicji tej widać łatwo, że zdanie w sensie logiki musi być zdaniem oznajmującym w sensie gramatycznym. Nie każde jednak zdanie oznajmujące w sensie gramatyki jest zdaniem w sensie logiki, np. "a jest liczbą parzystą" jest gramatycznie zdaniem oznajmującym ale o wypowiedzi tej nie da się powiedzieć, czy jest prawdziwa dopóki nie wiemy jaką liczbą jest a.

Zdania oznaczać będziemy symbolami p, q, r itd. Niech p będzie zdaniem. Fakt, że zdanie p jest prawdziwe będziemy zapisywać w postaci $w(p) = 1$ (czytamy: wartość logiczna zdania p wynosi 1). Odpowiednio fakt, że zdanie p jest fałszywe zapisujemy w postaci $w(p) = 0$ (czytamy: wartość logiczna zdania p wynosi 0).

Mając dane pewne zdania możemy z nich za pomocą *funktorów zdaniotwórczych* (*spójników*) tworzyć nowe zdania bardziej złożone. Oto definicje pewnych podstawowych funktorów zdaniotwórczych:

Definicja 1.2 *Jeżeli p jest danym zdaniem, to zdanie postaci "nieprawda, że p" nazywamy negacją albo zaprzeczeniem zdania p. Negację zdania p zapisujemy za pomocą symbolu $\sim p$. Wartości logiczne negacji opisuje następująca tabela:*

p	$\sim p$
0	1
1	0

.

Niech p, q będą dwoma danymi zdaniami.

Definicja 1.3 *Zdanie postaci "p lub q" nazywamy alternatywą albo sumą logiczną zdań p, q. Alternatywę zdań p, q zapisujemy za pomocą symbolu $p \vee q$. Zdanie $p \vee q$ jest fałszywe tylko w tym przypadku, gdy oba składniki tej alternatywy są fałszywe. Wartości logiczne alternatywy opisuje następująca tabela:*

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

.

Definicja 1.4 *Zdanie postaci "p i q" nazywamy koniunkcją albo iloczynem logicznym zdań p, q. Koniunkcję zdań p, q zapisujemy za pomocą symbolu $p \wedge q$. Zdanie $p \wedge q$ jest prawdziwe tylko w tym przypadku, gdy oba czynniki tej koniunkcji są prawdziwe. Wartości logiczne koniunkcji opisuje następująca tabela:*

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

.

Definicja 1.5 *Zdanie postaci "jeżeli p, to q" nazywamy implikacją albo wynikaniem. Implikację zapisujemy za pomocą symbolu $p \Rightarrow q$. Zdanie p nazywamy poprzednikiem, zaś zdanie q następnikiem implikacji $p \Rightarrow q$. Implikacja jest fałszywa tylko w tym przypadku, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, zaś następnik fałszywy. Wartości logiczne implikacji opisuje następująca tabela*

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

.

Załóżmy, że zdanie $p \Rightarrow q$ jest prawdziwe (np. jest twierdzeniem matematycznym sformułowanym w postaci implikacji). Wówczas p nazywamy *warunkiem wystarczającym* albo *warunkiem dostatecznym* dla q, zaś q nazywamy *warunkiem koniecznym* dla p.

Definicja 1.6 *Zdanie postaci "p wtedy i tylko wtedy, gdy q" nazywamy równoważnością zdań p, q. Równoważność zapisujemy za pomocą symbolu $p \iff q$. Równoważność $p \iff q$ jest prawdziwa w tych przypadkach, gdy oba zdania p i q mają tę samą wartość logiczną. Wartości logiczne równoważności opisuje* *następująca tabela:*

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

.

Jeżeli równoważność $p \Longleftrightarrow q$ jest zdaniem prawdziwym (np. jest twierdzeniem matematycznym sformułowanym w postaci równoważności), to mówimy, że p jest *warunkiem koniecznym i wystarczającym* dla q i odwrotnie.

Najbardziej interesujacymi zdaniami złożonymi są takie, które są prawdziwe niezależnie od wartości logicznych zdań składowych.

Definicja 1.7 *Zdanie złożone, którego wartość logiczna wynosi 1 niezależnie od wartości logicznych zdań składowych nazywamy prawem logicznym albo tautologią.*

Oto najważniejsze przykłady praw logicznych:

1. *Prawa przemienności*
$$(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)\,.$$
$$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)\,.$$

2. *Prawa łączności*
$$[(p \vee q) \vee r] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee r)]\,.$$
$$[(p \wedge q) \wedge r] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]\,.$$

3. *Prawa rozdzielności*
$$[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]\,.$$
$$[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]\,.$$

4. *Prawo podwójnego przeczenia*
$$[\sim (\sim p)] \Longleftrightarrow p.$$

5. *Prawo wyłączonego środka*
$$p \ \vee (\sim p)\,.$$
Prawo to można także wyrazić słownie: *Z dwóch zdań p i $\sim p$ co najmniej jedno jest prawdziwe.*

6. *Prawo sprzeczności*
$$\sim (p \ \wedge (\sim p))\,.$$
Prawo to można także wyrazić słowami: *Z dwóch zdań p i $\sim p$ co najmniej jedno jest fałszywe.*

7. *Prawa de Morgana*

$$(\sim (p \vee q)) \Longleftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q)) \, .$$

$$(\sim (p \wedge q)) \Longleftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q)) \, .$$

8. *Prawo eliminacji implikacji*

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow ((\sim p) \vee q) \, .$$

9. *Prawo zaprzeczania implikacji*

$$(\sim (p \Longrightarrow q)) \Longleftrightarrow (p \wedge (\sim q)) \, .$$

10. *Prawo transpozycji*

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow ((\sim q) \Longrightarrow (\sim p)) \, .$$

Załóżmy, że dane jest twierdzenie matematyczne sformułowane w postaci implikacji $p \Longrightarrow q$. Nazwijmy to twierdzenie *twierdzeniem prostym.* Wtedy zdanie $q \Longrightarrow p$ nazywamy *twierdzeniem odwrotnym*, zdanie $(\sim p) \Longrightarrow (\sim q)$ nazywamy *twierdzeniem przeciwnym*, zaś zdanie $(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)$ — *twierdzeniem transponowanym.* Z prawa transpozycji wynika, że twierdzenia proste i transponowane są równoważne oraz, że twierdzenia odwrotne i przeciwne są równoważne. Inne pary twierdzeń w tym układzie nie muszą być równoważne.

11. *Prawo eliminacji równoważności*

$$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)) \, .$$

Aby udowodnić, że jakieś zdanie jest prawem rachunku zdań, konstruujemy, posługując się definicjami funktorów zdaniotwórczych, tzw. tabelę wartości logicznych dla danego zdania. Dla przykładu udowodnimy prawo zaprzeczania implikacji.

p	q	$p \Longrightarrow q$	$\sim (p \Longrightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	A
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1

,

gdzie A jest zdaniem postaci $[\sim (p \Longrightarrow q)] \Longleftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$. Komplet jedynek w ostatniej kolumnie oznacza, że nasze zdanie jest prawdziwe niezależnie od wartości logicznych zdań p, q.

1.1.2 Formy zdaniowe, kwantyfikatory

Definicja 1.8 *Niech X będzie ustalonym zbiorem. Formą (funkcją) zdaniową o dziedzinie X nazywamy wyrażenie $\varphi(x)$ zawierające zmienną x, które staje się zdaniem, gdy w miejsce zmiennej x wstawimy nazwę dowolnego elementu ze zbioru X.*

Przykładami form zdaniowych są równania i nierówności:

$$2x + 1 = 7$$

$$\frac{x-3}{2x+3} \geqslant x - 4$$

$$\sqrt{1-x^2} > 3.$$

Formami zdaniowymi są także wyrażenia postaci

Liczba x jest parzysta.

Najczęściej z samej postaci formy zdaniowej jesteśmy w stanie odczytać jej dziedzinę. Dla czterech ostatnio podanych form dziedzinami są odpowiednio: zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczby $-\frac{3}{2}$, zbiór liczb z przedziału $\langle -1; 1\rangle$ i wreszcie zbiór liczb całkowitych.

W sposób analogiczny definiujemy formy zdaniowe większej ilości zmiennych.

Definicja 1.9 *Kwantyfikatorem ogólnym nazywamy wyrażenie "dla każdego x", które postawione przed formą zdaniową zmiennej x czyni z niej zdanie. Kwantyfikator ogólny postawiony przed formą zdaniową $\varphi(x)$ zapisujemy symbolicznie*

$$\bigwedge_x \varphi(x)$$

i czytamy "dla każdego x zachodzi $\varphi(x)$".

Kwantyfikatorem szczegółowym nazywamy wyrażenie "istnieje x takie, że", które postawione przed formą zdaniową zmiennej x czyni z niej zdanie. Kwantyfikator szczegółowy postawiony przed formą zdaniową $\varphi(x)$ zapisujemy symbolicznie

$$\bigvee_x \varphi(x)$$

i czytamy "istnieje takie x, że zachodzi $\varphi(x)$".

Przykład 1.10 *Zdanie*

$$\bigwedge_x x^2 + 1 > 0$$

jest zdaniem prawdziwym, gdyż forma zdaniowa $x^2 + 1 > 0$ jest spełniona dla wszystkich elementów swojej dziedziny, czyli dla wszystkich liczb rzeczywistych. Podobnie zdanie

$$\bigvee_x x^2 + 2x - 3 = 0$$

jest zdaniem prawdziwym, gdyż na przykład liczba -3 *spełnia formę zdaniową* $x^2 + 2x - 3 = 0$. *Zdanie*

$$\bigwedge_x \frac{x-1}{x+2} \leqslant 5$$

jest zdaniem fałszywym, gdyż na przykład liczba $-\frac{5}{2}$, *która jest różna od* -2, *więc leży w dziedzinie, nie spełnia formy zdaniowej* $\frac{x-1}{x+2} \leqslant 5$. *Wreszcie zdanie*

$$\bigvee_x x^2 + x + 1 \leqslant 0$$

jest zdaniem fałszywym, gdyż nie ma takiej liczby x, *który spełniałaby formę zdaniową* $x^2 + x + 1 \leqslant 0$.

W rachunku kwantyfikatorów wprowadza się także pojęcie prawa. *Prawem rachunku kwantyfikatorów* będzie zdanie zawierające kwantyfikatory, które jest prawdziwe niezależnie od tego jakie formy zdaniowe do tego zdania wstawimy. Istotnymi dla nas prawami rachunku kwantyfikatorów będą *prawa de Morgana*:

$$\left[\sim\left(\bigwedge_x \varphi(x)\right)\right] \iff \left[\bigvee_x (\sim \varphi(x))\right]$$

$$\left[\sim\left(\bigvee_x \varphi(x)\right)\right] \iff \left[\bigwedge_x (\sim \varphi(x))\right].$$

1.2 Rachunek zbiorów

Zakładamy, że wiadomo co to jest zbiór i co to jest element zbioru (są to tak zwane pojęcia pierwotne). Umawiamy się, że zbiory będziemy oznaczać symbolami $A, B, \ldots, X, Y, Z$, zaś ich elementy — symbolami $a, b, \ldots, x, y, z$.

Fakt, że a jest elementem zbioru A zapisywać będziemy symbolicznie

$$a \in A,$$

zaś fakt, że a nie jest elementem zbioru A — symbolem

$$a \notin A.$$

Zbiory zawierające skończoną ilość elementów nazywać będziemy *skończonymi*. W szczególności zbiór nie zawierający żadnego elementu nazywamy *pustym* i oznaczamy symbolem $\varnothing$. Zbiory zawierające nieskończoną ilość elementów nazywamy *nieskończonymi*. Zbiór skończony może być zadany przez wymienienie wszystkich elementów tego zbioru np.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

jest zbiorem złożonym z liczb naturalnych mniejszych od 9. Oczywiście w ten sposób nie da się zadać żadnego zbioru nieskończonego. Mimo to czasami stosowana jest ta nieprecyzyjna metoda do opisywania zbiorów nieskończonych, np. pisząc
$$\{2, 4, 6, 8, \dots\},$$
domyślamy się, że chodzi o zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych. Aby móc precyzyjnie określać zbiory (także nieskończone) wprowadzamy następujący zapis: niech $\varphi(x)$ będzie dowolną formą zdaniową o dziedzinie X. Symbol
$$\{x : \varphi(x)\}$$
oznacza zbiór złożony z tych elementów dziedziny X, które spełniają formę zdaniową $\varphi(x)$ tzn. z tych elementów, które podstawione do formy $\varphi(x)$ czynią z niej zdanie prawdziwe. Symbol ten czytamy: "zbiór tych x, dla których zachodzi $\varphi(x)$".

Przykład 1.11 *a)* $\left\{x : x^2 + 2x - 3 = 0\right\} = \{-3, 1\}$.
b) $\{x : 2x + 1 > 5\} = (2, \infty)$,
c) $\{2, 4, 6, \dots\} = \left\{x : \bigvee_{k\in\mathbb{N}} x = 2k\right\}$.

Na zbiorach określamy pewne relacje i działania. Oto definicje:
Niech A, B będą ustalonymi zbiorami

Definicja 1.12 *Mówimy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B (inaczej A jest podzbiorem B albo B zawiera A), co zapisujemy symbolem*
$$A \subset B,$$
gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B.

Definicja 1.13 *Mówimy, że zbiory A, B są równe, co zapisujemy w postaci $A = B$, gdy są złożone z tych samych elementów.*

Łatwo widać, że zachodzi następujące

Twierdzenie 1.14 $(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$.

Definicja 1.15 *Sumą zbiorów A, B nazywamy zbiór złożony z elementów należących do co najmniej jednego ze zbiorów A lub B. Symbolicznie sumę tę oznaczamy przez $A \cup B$. Można zapisać tę definicję w sposób formalny:*
$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Definicja 1.16 *Iloczynem albo częścią wspólną zbiorów A, B nazywamy zbiór złożony z elementów należących do obu zbiorów A i B. Symbolicznie iloczyn ten oznaczamy przez $A \cap B$. Można zapisać tę definicję w sposób formalny:*
$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Definicja 1.17 *Zbiory A i B nazywamy rozłącznymi, gdy*

$$A \cap B = \varnothing.$$

Definicja 1.18 *Różnicą zbiorów A, B, oznaczaną symbolem $A \setminus B$, nazywamy zbiór złożony z tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B. Formalnie*

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Załóżmy teraz, że wszystkie rozważane przez nas zbiory są zawarte w pewnej ustalonej przestrzeni X.

Definicja 1.19 *Dopełnieniem zbioru A nazywamy zbiór złożony z tych elementów, które nie należą do zbioru A. Dopełnienie zbioru A oznaczamy symbolem A'. Formalnie*

$$A' = X \setminus A = \{x : x \notin A\}.$$

Działania na zbiorach podlegają pewnym prawom. Oto najważniejsze z nich:

Twierdzenie 1.20 *Jeżeli $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są formami zdaniowymi o tej samej dziedzinie, to*

$$\{x : \varphi(x)\}' = \{x :\sim \varphi(x)\},$$
$$\{x : \varphi(x) \vee \psi(x)\} = \{x : \varphi(x)\} \cup \{x : \psi(x)\},$$
$$\{x : \varphi(x) \wedge \psi(x)\} = \{x : \varphi(x)\} \cap \{x : \psi(x)\}.$$

Definicja 1.21 *Parą uporządkowaną będziemy nazywać dwa elementy, z których jeden wyróżniony jest jako pierwszy.*

Parę uporządkowaną o pierwszym elemencie a i drugim elemencie b oznaczać będziemy symbolem (a, b).

Przykład 1.22 *Pokażemy teraz w jaki sposób korzysta się z Twierdzenia 1.20.*

a) Wyznaczymy dziedzinę funkcji f zdefiniowanej wzorem $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Korzystając z pierwszej równości w Twierdzeniu 1.20 mamy $D = \{x : x - 2 \neq 0\} = \{x :\sim (x - 2 = 0)\} = \{x : x = 2\}' = \{2\}'$, czyli dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczby 2..

b) Wyznaczymy podzbiór F płaszczyzny złożony z tych punktów, których współrzędne spełniają równanie

$$(x - y + 1)(2x + y - 3) = 0.$$

Korzystając z drugiej równości w Twierdzeniu 1.20 mamy

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y) : (x - y + 1)(2x + y - 3) = 0\} \\ &= \{(x, y) : x - y + 1 = 0 \ \vee \ 2x + y - 3 = 0\} \\ &= \{(x, y) : x - y + 1 = 0\} \cup \{(x, y) : 2x + y - 3 = 0\}, \end{aligned}$$

czyli F jest sumą dwóch prostych odpowiednio o równaniach $x - y + 1 = 0$ i $2x + y - 3 = 0$.

c) Znajdziemy zbiór F rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} .$$

Korzystając z trzeciej równości w Twierdzeniu 1.20 mamy

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y) : x - y + 1 = 0 \wedge 2x + y - 3 = 0\} \\ &= \{(x, y) : x - y + 1 = 0\} \cap \{(x, y) : 2x + y - 3 = 0\}, \end{aligned}$$

czyli F jest częścią wspólną prostych danych równaniami $x - y + 1 = 0$ i $2x + y - 3 = 0$.

Twierdzenie 1.23 *Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące prawa rachunku zbiorów:*

1) Prawa przemienności:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, \\ A \cap B &= B \cap A. \end{aligned}$$

2) Prawa łączności:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C). \end{aligned}$$

3) Prawa rozdzielności:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

4) Prawa de Morgana:

$$\begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B', \\ (A \cap B)' &= A' \cup B'. \end{aligned}$$

Niech A, B będą ustalonymi zbiorami.

Definicja 1.24 *Iloczynem kartezjańskim zbioru A przez zbiór B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (a, b) takich, że $a \in A$ i $b \in B$.*

Iloczyn kartezjański zbioru A przez zbiór B oznaczać będziemy symbolem $A \times B$. Możemy więc powyższą definicję zapisać formalnie

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

W przypadku, gdy $A = B$, to zamiast pisać $A \times A$, będziemy pisać A^2.

1.3 Zbiory liczbowe

Wprowadzamy następujące oznaczenia zbiorów liczbowych

$\mathbb{N}$ — zbiór liczb naturalnych ($\{1, 2, 3, ...\}$),
$\mathbb{Z}$ — zbiór liczb całkowitych,
$\mathbb{Q}$ — zbiór liczb wymiernych (czasami używany jest symbol $\mathbb{W}$),
$\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych.

Dodatkowo dla potrzeb obliczania granic wprowadzamy dwa symbole: $+\infty$ (czytamy "plus nieskończoność") i $-\infty$ (czytamy "minus nieskończoność"). Często zamiast $+\infty$ będziemy pisać ∞. Umawiamy się, że dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzą nierówności

$$a < +\infty \text{ i } a > -\infty.$$

Pamiętajmy jednak, że symbole te nie są liczbami i nie można na nich wykonywać działań arytmetycznych, jak na liczbach rzeczywistych. Czasami będziemy używać symbolu $\pm\infty$ i wtedy napis "$g = \pm\infty$" rozumiemy jako $g = +\infty$ lub $g = -\infty$, natomiast napis "$g \neq \pm\infty$" rozumiemy jako $g \neq +\infty$ i $g \neq -\infty$.

1.4 Wartość bezwzględna i jej własności

Definicja 1.25 *Modułem (wartością bezwzględną) dowolnej liczby rzeczywistej a nazywamy liczbę $|a|$ zdefiniowaną za pomocą równości*

$$|a| = \begin{cases} a & , \textit{gdy } a \geqslant 0 \\ -a & , \textit{gdy } a < 0 \end{cases} .$$

Geometrycznie $|a|$ oznacza odległość punktu a na osi liczbowej od punktu 0. Zauważmy, że równość

$$|a| = \begin{cases} a & , \text{gdy } a > 0 \\ -a & , \text{gdy } a \leqslant 0 \end{cases}$$

daje definicję modułu równoważną sformułowanej powyżej. Wprost z definicji modułu wynikają jego podstawowe własności:

1. Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność
$$|a| \geqslant 0.$$
2. Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność podwójna
$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|.$$
3. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równość
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

4. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, jeśli $b \neq 0$, to
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

5. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność (zwana *nierównością trójkąta*)
$$|a+b| \leqslant |a| + |b|\,,$$
przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy a i b są albo równocześnie nieujemne, albo równocześnie niedodatnie.

6. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność
$$|a-b| \geqslant ||a| - |b||\,.$$

7. Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ i dowolnego $\varepsilon \geqslant 0$ prawdziwa jest równoważność
$$|a| = \varepsilon \iff (a = \varepsilon \ \vee \ a = -\varepsilon)\,.$$

8. Dla dowolnych $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równoważność
$$|a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a < \varepsilon.$$

9. Dla dowolnych $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równoważność
$$|a| > \varepsilon \iff (a > \varepsilon \ \vee \ a < -\varepsilon)\,.$$

Własnosci 8. i 9. pozostają prawdziwe, gdy nierówności ostre zastąpimy nieostrymi.

1.5 Przedziały, otoczenia, sąsiedztwa

W zbiorze liczb rzeczywistych wprowadzamy pewne szczególne podzbiory zwane *przedziałami*:

- *Przedział otwarty właściwy:*
$$(a; b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}\,,$$
gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$.

- *Przedział domknięty właściwy:*
$$\langle a; b\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}\,,$$
gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Czasami zamiast $\langle a; b\rangle$ używa się symbolu $[a; b]$.

- *Przedziały domknięto-otwarte właściwe:*

$$\langle a;b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\},$$
$$(a;b\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\},$$

  gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$.

- *Przedziały otwarte niewłaściwe:*

$$(-\infty;b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x < b\},$$
$$(a;\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

  gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

- *Przedziały domknięte niewłaściwe:*

$$(-\infty;b\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\},$$
$$\langle a;\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\},$$

  gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

- Dodatkowo czasami symbolem $(-\infty;\infty)$ będziemy oznaczać cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ i w tym przypadku także będziemy mówić o przedziale niewłaściwym.

Ponadto w zbiorze liczb rzeczywistych wprowadzamy pojęcia otoczenia i sąsiedztwa punktów.

Definicja 1.26 *Niech x_0 będzie liczbą rzeczywistą i ε — liczbą rzeczywistą dodatnią. Otoczeniem punktu x_0 o promieniu ε nazywamy podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ określony za pomocą równości*

$$U_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Zauważmy, że z własności 8. modułu wynika, że zachodzi równość

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon).$$

Definicja 1.27 *Otoczeniem lewostronnym (odpowiednio prawostronnym) punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $\varepsilon > 0$ nazywamy przedział*

$$(x_0 - \varepsilon; x_0\rangle \ \ \textit{(odpowiednio } \langle x_0; x_0 + \varepsilon)\textit{)}$$

i otoczenie to oznaczamy symbolem $U_\varepsilon^-(x_0)$ (odpowiednio $U_\varepsilon^+(x_0)$).

Czasami, gdy wiadomo jaki jest promień otoczenia lub jest obojętne o jaki promień chodzi, opuszczamy w oznaczeniach otoczeń dolny wskaźnik ε i piszemy np. $U^+(x_0)$.

Definicja 1.28 *Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$. Sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu ε nazywamy zbiór określony za pomocą równości*

$$S_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Zauważmy, że z własności 8., 9. modułu wynika, że zachodzi równość

$$S_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon).$$

Zatem $S_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Definicja 1.29 *Sąsiedztwem lewostronnym (odpowiednio prawostronnym) punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $\varepsilon > 0$ nazywamy przedział*

$$(x_0 - \varepsilon; x_0) \text{ (odpowiednio } (x_0; x_0 + \varepsilon)\text{)}$$

i sąsiedztwo to oznaczamy symbolem $S_\varepsilon^-(x_0)$ (odpowiednio $S_\varepsilon^+(x_0)$).

W odniesieniu do sąsiedztw także obowiązuje umowa o ewentualnym opuszczaniu indeksu ε.

Zauważmy, że dla zdefiniowanych powyżej otoczeń i sąsiedztw punktu x_0 zawsze otoczenie zawiera punkt x_0, zaś sąsiedztwo nie zawiera tego punktu.

Dodatkowo umawiamy się, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, to przedziały postaci $(-\infty; b)$ będziemy nazywać *otoczeniami* lub *sąsiedztwami punktu* $-\infty$, zaś przedziały postaci $(a; \infty)$ nazywać będziemy *otoczeniami* lub *sąsiedztwami punktu* $+\infty$.

1.6 Silnia i symbol Newtona

Definicja 1.30 *Niech $n \in \mathbb{N}$. Definiujemy*

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n.$$

Dodatkowo na mocy definicji $0! \stackrel{def}{=} 1$.

Symbol $n!$ czytamy "n silnia".

Definicja 1.31 *Niech $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$. Symbolem Newtona nazywamy wyrażenie*

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Symbol $\binom{n}{k}$ czytamy "n po k".

1.7 Własności potęgowania

Zakładając, że czytelnik zna pojęcie potęgowania przypomnimy pewne prawa obowiązujące dla tego działania.

Na początek przypomnijmy, że dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $a^0 = 1$. Dla $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $a, b > 0$ (dla pewnych wykładników x, y założenia o a, b mogą być osłabiane w zależności od sytuacji) zachodzą wzory:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N} \text{ i } n > 1,$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x},$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \tag{1.1}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \tag{1.2}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}. \tag{1.3}$$

Ponadto mamy

Twierdzenie 1.32 *(Wzór dwumianowy Newtona) Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i dowolnej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Z wzoru dwumianowego Newtona dostajemy łatwo następujące wzory uproszczonego mnożenia:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Ponadto bardzo przydatne bywają następujące wzory uproszczonego mnożenia:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right),$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right).$$

1.8 Logarytm i jego własności

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$.

Definicja 1.33 *Logarytmem liczby $x > 0$ przy podstawie a nazywamy taką liczbę y, że $a^y = x$. Logarytm liczby x przy podstawie a oznaczamy symbolem $\log_a x$. Symbolicznie możemy napisać*

$$\log_a x = y \iff a^y = x.$$

Umawiamy się, że jeżeli $a = 10$, to logarytm nazywamy *dziesiętnym* i w symbolicznym zapisie opuszczamy podstawę. Piszemy więc wtedy $\log x$.

Ze wzorów (1.1), (1.2) i (1.3) wynika następujące

Twierdzenie 1.34 *Dla dowolnych liczb $x, y, c > 0$ oraz dowolnych $a, b > 0$ i $a, b \neq 1$ prawdziwe są wzory*

$$\begin{aligned} \log_a (x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y, \\ \log_a \left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y, \\ \log_a (x^c) &= c \log_a x, \\ \log_b x &= \frac{\log_a x}{\log_a b}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ostatni z wzorów (1.4) będziemy nazywać wzorem na zamianę podstaw logarytmu.

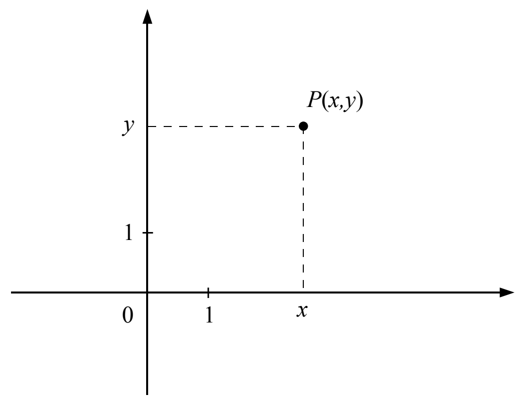
1.9 Płaszczyzna kartezjańska

Definicja 1.35 *Prostokątnym układem współrzędnych na płaszczyźnie nazywamy parę uporządkowaną osi liczbowych wzajemnie prostopadłych o wspólnym zerze i jednakowych jednostkach.*

Czasami ze względów praktycznych na osiach układu przyjmujemy różne jednostki.

Definicja 1.36 *Płaszczyznę z zadanym na niej prostokątnym układem współrzędnych nazywać będziemy płaszczyzną kartezjańską.*

Zwykle na płaszczyźnie układ współrzędnych umieszczamy w ten sposób, że pierwsza oś jest pozioma skierowana z lewa na prawo, zaś druga jest pionowa skierowana z dołu do góry. Oczywiście położenie osi na płaszczyźnie jest kwestią czysto umowną. Zauważmy, że każdemu punktowi P płaszczyzny kartezjańskiej odpowiada wyznaczona jednoznacznie uporządkowana para liczb rzeczywistych (x, y) zwanych *współrzędnymi punktu* P. Współrzędna x jest współrzędną rzutu prostokątnego punktu P na pierwszej osi, zaś y jest współrzędną rzutu prostokątnego punktu P na drugiej osi. Jest także odwrotnie, tzn. jeżeli weźmiemy dowolną uporządkowaną parę liczb rzeczywistych (x, y), to parze tej odpowiada dokładnie jeden punkt P płaszczyzny kartezjańskiej taki, że współrzędnymi punktu P są właśnie liczby x i y. Jeżeli P ma współrzędne x i y, to będziemy pisać $P\,(x,y)$. Współrzędną x nazywamy *odciętą* punktu P, zaś y *rzędną* tego punktu. Oś odciętych zwykle oznaczamy symbolem Ox, zaś oś rzędnych symbolem Oy.



Rys. 1.1

W związku z opisaną wyżej wzajemnie jednoznaczną odpowiedniością między punktami płaszczyzny kartezjańskiej, a uporządkowanymi parami liczb rzeczywistych możemy płaszczyznę kartezjańską utożsamić ze zbiorem wszystkich par uporządkowanych liczb rzeczywistych. Będziemy więc płaszczyznę kartezjańską często oznaczać symbolem $\mathbb{R}^2$.

Rozdział 2

Funkcja i jej własności

2.1 Pojęcie funkcji i jej wykresu

Niech X, Y będą ustalonymi niepustymi zbiorami.

Definicja 2.1 *Funkcją przekształcającą (odwzorowującą) zbiór X w zbiór Y nazywamy dowolne przyporządkowanie, które każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowuje dokładnie jeden element $y \in Y$.*

Funkcje oznaczamy zwykle literami $f, g, h, ...$, a czasami literami $F, G, H, ...$ Jeżeli f jest funkcją przekształcającą zbiór X w zbiór Y, to piszemy symbolicznie $f : X \to Y$. O funkcji $f : X \to Y$ mówimy, że jest określona na X. Elementy zbioru X nazywamy *argumentami* funkcji f, zaś sam zbiór X nazywamy *dziedziną funkcji* f. Często na oznaczenie dziedziny funkcji f będziemy używać symbolu D_f. Niech $f : X \to Y$. Wówczas dla dowolnego $x \in X$ jedyny element $y \in Y$ przyporządkowany przez f elementowi x oznaczać będziemy przez $f(x)$ i nazywać będziemy *wartością funkcji f dla argumentu x*. Zbiór Y nazywamy *przeciwdziedziną funkcji* f. W przeciwdziedzinie Y wyróżniamy podzbiór

$$f(X) \overset{\text{def}}{=} \{f(x) : x \in X\}$$

i nazywamy go *zbiorem wartości funkcji* f. Jeżeli $f(X) = Y$, to mówimy, że funkcja f przekształca zbiór X *na* zbiór Y.

Definicja 2.2 *Jeżeli $f : X \to Y$, to wykresem funkcji f nazywamy podzbiór zbioru $X \times Y$ określony przez równość*

$$W_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

2.2 Złożenie funkcji, funkcja odwrotna

Definicja 2.3 *Niech $f : D_f \to Y$ i $g : D_g \to Z$. Załóżmy dodatkowo, że $f(D_f) \subset D_g$. Funkcję $h : D_f \to Z$ określoną wzorem $h(x) = g(f(x))$ nazywać będziemy złożeniem funkcji f z funkcją g i oznaczać symbolem $g \circ f$.*

Nie zawsze jednak spełniony jest warunek $f(D_f) \subset D_g$. Jeżeli jednak zbiór

$$D_h \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$

jest niepusty, to wzór $h(x) = g(f(x))$ opisuje funkcję $h : D_h \to Z$, którą także nazywać będziemy złożeniem funkcji f z funkcją g i oznaczać symbolem $g \circ f$.

Dla złożenia $g \circ f$ funkcję f nazywamy *wewnętrzną*, zaś g — *zewnętrzną*.

Definicja 2.4 *Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy różnowartościową, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest implikacja*

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2) \tag{2.1}$$

lub równoważnie

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2. \tag{2.2}$$

Definicja 2.5 *Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy wzajemnie jednoznaczną, gdy jest różnowartościowa i przekształca zbiór X na zbiór Y.*

Zauważmy, że jeżeli $f : X \to Y$ jest wzajemnie jednoznaczna, to nie tylko każdemu $x \in X$ odpowiada dokładnie jedno $y = f(x) \in Y$, ale także każdemu $y \in Y$ odpowiada dokładnie jedno $x \in X$ takie, że $y = f(x)$. Zatem określona jest funkcja przekształcająca zbiór Y w zbiór X, która każdemu $y \in Y$ przyporządkowuje to jedyne $x \in X$, dla którego $y = f(x)$. Tak określoną funkcję oznaczamy symbolem f^{-1} i nazywamy *funkcją odwrotną* względem f.

Funkcję odwrotną względem wzajemnie jednoznacznej funkcji $f : X \to Y$ można by zdefiniować za pomocą równoważności

$$x = f^{-1}(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x) \tag{2.3}$$

dla dowolnych $x \in X$, i dowolnych $y \in Y$. Wprost z powyższej definicji wynika, że jeśli $f : X \to Y$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną , to

$$\bigwedge_{x \in X} \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$$

oraz

$$\bigwedge_{y \in Y} \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y.$$

Niech $f : X \to Y$. Jeżeli $X, Y \subset \mathbb{R}$, to o funkcji f mówimy, że jest *funkcją liczbową (rzeczywistą) zmiennej rzeczywistej.* W dalszym ciągu zajmować się będziemy wyłącznie takimi funkcjami. Sposób przyporządkowania dla takich funkcji daje się zwykle opisać za pomocą wzoru, np. $f(x) = x^2 - 1$, $f(x) = \sqrt{x+1}$, $f(x) = \frac{x-2}{2x+1}$. Czasami zamiast $f(x)$ po lewej stronie wzoru będziemy pisać y, a więc napiszemy $y = x^2 - 1$, $y = \sqrt{x+1}$, $y = \frac{x-2}{2x+1}$.

Zauważmy, że symbol $f : X \to Y$ nie niesie pełnej informacji o funkcji, gdyż nie zawiera w sobie sposobu przyporządkowania. W związku z tym czasami będziemy się posługiwać pełnym zapisem

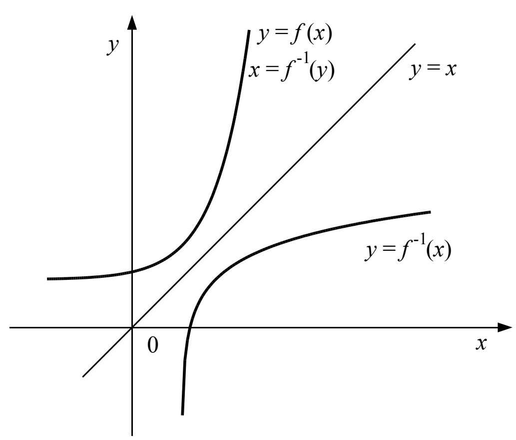
$$f : X \ni x \mapsto y = f(x) \in Y,$$

gdzie $y = f(x)$ może być wzorem opisującym tę funkcję. Czasami podawany jest tylko wzór opisujący funkcję. W takim przypadku przez dziedzinę funkcji rozumiemy zawsze tzw. *dziedzinę naturalną*, czyli największy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, w którym wykonalne są wszystkie działania występujące we wzorze.

Dla funkcji liczbowej zmiennej rzeczywistej $f : D_f \to \mathbb{R}$ jej wykres może być traktowany jako podzbiór płaszczyzny kartezjańskiej. Mianowicie

$$W_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f \ \wedge \ y = f(x)\right\}$$

i wykres ten daje się rysować w układzie współrzędnych. Wprost z definicji funkcji widać, że podzbiór płaszczyzny kartezjańskiej jest wykresem pewnej funkcji wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta równoległa do osi Oy przecina ten zbiór w co najwyżej jednym punkcie. Zauważmy dalej, że w tym przypadku mamy prostą graficzną interpretację różnowartościowości: funkcja jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta równoległa do osi Ox przecina ten wykres w co najwyżej jednym punkcie. Ponadto, jeżeli $f : D_f \to f(D_f)$ ($D_f \subset \mathbb{R}$ i $f(D_f) \subset \mathbb{R}$) jest funkcją wzajemnie jednoznaczną i f^{-1} jest funkcją względem niej odwrotną, to zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej, których współrzędne spełniają równanie $x = f^{-1}(y)$ pokrywa się z wykresem W_f funkcji f na mocy (2.3). Ponieważ jesteśmy przyzwyczajeni do tego, że argument funkcji oznaczany jest symbolem x, więc podając wzór na funkcję odwrotną zamieniamy nazwy zmiennych miejscami i piszemy $y = f^{-1}(x)$. Po tej zamianie wykres funkcji f^{-1} otrzymuje się z wykresu funkcji f przez zastosowanie do niego symetrii osiowej o osi będącej dwusieczną pierwszej i trzeciej ćwiartki układu współrzędnych (Rys. 2.1).



Rys. 2.1

Przykład 2.6 *a) Wyznaczymy dziedzinę naturalną funkcji danej wzorem*

$$f(x) = x^2 + 3x - 7.$$

Widać, że wszystkie działania występujące w tym wzorze są wykonalne na każdej liczbie rzeczywistej. Zatem $D_f = \mathbb{R}$.

b) Wyznaczymy teraz dziedzinę naturalną funkcji danej wzorem $f(x) = \sqrt{x+2}$. *Wiadomo, że pierwiastek kwadratowy daje się obliczyć tylko dla liczb nieujemnych. Zatem dla wyznaczenia dziedziny musimy zrobić zastrzeżenie* $x+2 \geqslant 0$, *czyli* $x \geqslant -2$. *Ostatecznie dziedziną funkcji* f *jest zbiór* $D_f = \langle -2; \infty)$.

c) Określimy dziedzinę naturalną funkcji $f(x) = \frac{x-1}{3x+2}$. *Wiadomo, że jedynym warunkiem niezbędnym dla wykonalności dzielenia jest niezerowanie się mianownika, czyli* $3x + 2 \neq 0$. *Stąd otrzymujemy* $x \neq -\frac{2}{3}$ *i* $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

Przykład 2.7 *a) Wyznaczymy złożenie funkcji* f *danej wzorem* $f(x) = \sqrt{x}$ *z funkcją* g *daną wzorem* $g(x) = 2x + 1$. *Ponieważ* $D_g = \mathbb{R}$, *więc oczywiście zachodzi zawieranie* $f(D_f) \subset D_g$. *Zatem funkcja* $g \circ f$ *będzie określona na* D_f *i wzorem opisującym to złożenie jest*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} + 1.$$

Jeżeli teraz spróbujemy wyznaczyć dla powyższych funkcji złożenie funkcji g *z funkcją* f, *to pojawią się problemy z dziedziną tego złożenia. W tym przypadku nie zachodzi zawieranie* $g(D_g) \subset D_f$. *Zauważmy, że musimy teraz sprawdzić czy zbiór* $\{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$ *jest niepusty. Ponieważ* $D_f = \langle 0; \infty)$, *więc mamy*

$$\begin{aligned}\{x \in D_g : g(x) \in D_f\} &= \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \in \langle 0; \infty)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \geqslant 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant -\frac{1}{2}\right\} = \left\langle -\frac{1}{2}; \infty\right) \neq \varnothing.\end{aligned}$$

Zatem $D_{f \circ g} = \left\langle -\frac{1}{2}; \infty\right)$ *i dla* x *z tego przedziału mamy*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = \sqrt{2x + 1}.$$

b) Niech teraz $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ *oraz* $g(x) = x^2 - 3$. *Ponieważ* $D_g = \mathbb{R}$, *więc oczywiście* $f(D_f) \subset D_g$ *i dziedziną złożenia* $g \circ f$ *jest zbiór* $D_{g \circ f} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, *a samo złożenie określone jest wzorem*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - 3.$$

Dla złożenia $f \circ g$ *mamy*

$$\begin{aligned}\{x \in D_g : g(x) \in D_f\} &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \neq 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 4\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.\end{aligned}$$

W konsekwencji

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

i dla $x \in D_{f \circ g}$ *mamy*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x^2 - 3\right) = \frac{x^2 - 3 + 2}{x^2 - 3 - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}.$$

Z ostatnich dwóch przykładów widać, że składanie funkcji nie jest przemienne, a nawet, z uwagi na to, iż $D_{f\circ g} \neq D_{g\circ f}$, że nie bardzo jest sens mówić o takiej przemienności.

Przykład 2.8 *Zauważmy, że funkcja f dana wzorem $f(x) = x^2 + 4x - 3$ nie jest różnowartościowa, gdyż np. dla $x_1 = -3 \in D_f$ i $x_2 = -1 \in D_f$ mamy*

$$f(x_1) = (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 3 = -6 = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 3 = f(x_2),$$

czyli wskazaliśmy różne argumenty, na których funkcja f przyjmuje tę samą wartość.

Przykład 2.9 *Wyznaczymy funkcje odwrotne dla pewnych prostych funkcji.*

a) Niech funkcja f będzie dana wzorem $f(x) = 2x - 3$. Dziedziną tej funkcji jest $D_f = \mathbb{R}$. Jeżeli za przeciwdziedzinę Y przyjmiemy zbiór wartości $f(D_f)$ tej funkcji, to funkcja f przekształca D_f na zbiór Y. Zauważmy dalej, ze funkcja ta jest różnowartościowa. Istotnie, weźmy dwa dowolne $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ i załóżmy, że

$$f(x_1) = f(x_2),$$

czyli

$$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3.$$

Dodając do obu stron 3 i dzieląc stronami przez 2, otrzymujemy $x_1 = x_2$. W konsekwencji funkcja f jest różnowartościowa na mocy definicji z warunkiem (2.2). Ostatecznie nasza funkcja jest wzajemnie jednoznaczna, więc istnieje dla niej funkcja odwrotna. Aby znaleźć wzór opisujący funkcję odwrotną rozwiązujemy równanie

$$y = 2x - 3$$

względem zmiennej x.

$$2x = y + 3$$

$$x = \frac{y+3}{2}.$$

To, co otrzymaliśmy jako rozwiązanie opisuje właśnie funkcję odwrotną. Zatem $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$. Zamieniając nazwy zmiennych dostajemy $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$.

b) Niech f będzie funkcją zadaną wzorem $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$. Wówczas $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Przyjmując za przeciwdziedzinę Y zbiór wartości $f(D_f)$ otrzymujemy funkcję f, która przekształca zbiór D_f na zbiór Y. Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in D_f$, czyli $x_1, x_2 \neq 2$ i załóżmy, że

$$f(x_1) = f(x_2),$$

czyli

$$\frac{2x_1 + 1}{x_1 - 2} = \frac{2x_2 + 1}{x_2 - 2}.$$

Mnożąc stronami przez $(x_1 - 2)(x_2 - 2)$ otrzymujemy

$$2x_1x_2 - 4x_1 + x_2 - 2 = 2x_1x_2 - 4x_2 + x_1 - 2,$$

skąd

$$5x_1 = 5x_2$$

i w konsekwencji

$$x_1 = x_2.$$

Na mocy definicji różnowartościowości z warunkiem (2.2) funkcja f jest różnowartościowa. Ostatecznie jest ona wzajemnie jednoznaczna i posiada funkcję odwrotną. Dla wyznaczenia wzoru opisującego tę funkcję odwrotną rozwiązujemy równanie

$$y = \frac{2x+1}{x-2}$$

względem zmiennej x. Mamy kolejno

$$y\,(x-2) = 2x+1$$

$$yx - 2y = 2x + 1$$

$$yx - 2x = 2y + 1$$

$$(y-2)\,x = 2y+1$$

$$x = \frac{2y+1}{y-2}, \quad y \neq 2.$$

Ostatni wzór opisuje funkcję f^{-1}. Zamieniając nazwy zmiennych dostajemy ostatecznie

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}.$$

Zauważmy, że w tym przykładzie funkcja f^{-1} jest opisana dokładnie tym samym wzorem, co funkcja f.

2.3 Własności funkcji

Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$ i $g : D_g \to \mathbb{R}$, $D_g \subset \mathbb{R}$.

Definicja 2.10 *Funkcje f, g nazywamy równymi, gdy $D_f = D_g = D$ i dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $f(x) = g(x)$.*

Przykład 2.11 *a) Funkcje zadane wzorami $f(x) = (x-3)^2$, $g(x) = x^2-6x+9$ są równe, bo $D_f = D_g = \mathbb{R}$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi tożsamość $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$.*

b) Funkcje zadane wzorami $f(x) = x + 2$, $g(x) = \frac{x(x+2)}{x}$ nie są równe, gdyż $D_f = \mathbb{R}$ podczas, gdy $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Definicja 2.12 *Funkcję $f : D_f \to \mathbb{R}$, nazywamy ograniczoną, gdy istnieją takie liczby rzeczywiste m, M, że dla każdego $x \in D_f$ zachodzi nierówność*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

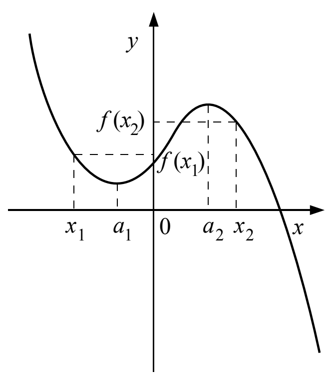
Definicja 2.13 *Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$. Funkcję f nazywamy stałą, gdy istnieje taka liczba a, że dla każdego $x \in D_f$ zachodzi równość $f(x) = a$. Inaczej, funkcja f jest stała, gdy jej zbiór wartości jest jednoelementowy.*

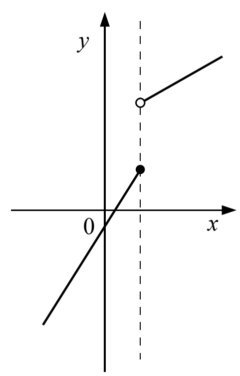
Definicja 2.14 *Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$, $A \subset D_f$. Funkcję f nazywamy rosnącą (odpowiednio malejącą) w zbiorze A, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in A$ zachodzi implikacja*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \ \ (\textit{odpowiednio } f(x_1) > f(x_2)\,).$$

Jeżeli $A = D_f$ i spełniony jest powyższy warunek, to mówimy po prostu, że funkcja f jest rosnąca (odpowiednio malejąca). Funkcje rosnące i malejące obejmujemy wspólną nazwą — funkcje monotoniczne.

Potocznie powyższa definicja mówi, że dla funkcji rosnącej w zbiorze A większemu argumentowi ze zbioru A odpowiada większa wartość, zaś dla funkcji malejącej w A większemu argumentowi ze zbioru A odpowiada mniejsza wartość. Na pierwszym rysunku (Rys. 2.2) przedstawiony jest wykres funkcji, która jest rosnąca w przedziale $\langle a_1; a_2 \rangle$, malejąca w przedziale $(-\infty; a_1\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle a_2; \infty)$. Funkcja ta nie jest jednak malejąca w zbiorze $(-\infty; a_1\rangle \cup \langle a_2; \infty)$, gdyż dla zaznaczonych na rysunku argumentów x_1, x_2 mamy $x_1 < x_2$ i $f(x_1) < f(x_2)$. Na drugim rysunku (Rys. 2.2) mamy wykres funkcji rosnącej.





Rys. 2.2

Przykład 2.15 *a) Zbadamy z definicji monotoniczność funkcji f danej wzorem $f(x) = -3x + 2$. Dziedziną funkcji f jest $D_f = \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i załóżmy, że $x_1 < x_2$. Obliczmy różnicę*

$$f(x_2) - f(x_1) = -3x_2 + 2 - (-3x_1 + 2) = -3x_2 + 3x_1 = -3(x_2 - x_1)\,.$$

Ponieważ na mocy założenia $x_2 - x_1 > 0$, więc $f(x_2) - f(x_1) < 0$. Zatem $f(x_1) > f(x_2)$. Na mocy definicji funkcja f jest malejąca.

b) Zbadamy z definicji monotoniczność funkcji f danej wzorem $f(x) = x^3$. Dziedziną funkcji f jest $D_f = \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i załóżmy, że $x_1 < x_2$. Obliczmy różnicę

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2)^3 - (x_1)^3 = (x_2 - x_1)\left[(x_2)^2 + x_1x_2 + (x_1)^2\right] \\ &= (x_2 - x_1)\left[(x_2)^2 + 2x_1x_2 + (x_1)^2 - x_1x_2\right] \\ &= (x_2 - x_1)\left[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2\right]. \end{aligned}$$

Jeżeli oba argumenty są równocześnie albo nieujemne, albo niedodatnie, to wyrażenie $(x_2)^2 + x_1x_2 + (x_1)^2$ jest dodatnie, gdyż jest to suma trzech liczb nieujemnych, przy czym co najmniej jeden ze składników jest dodatni, bo na mocy założenia $x_1 \neq x_2$. Ponieważ równocześnie z założenia mamy, że $x_2 - x_1 > 0$, więc $f(x_2) - f(x_1) > 0$ w tym przypadku. Jeżeli teraz jeden z argumentów x_1, x_2 jest ujemny, a drugi dodatni, to $x_1x_2 < 0$ i ponieważ $(x_1 + x_2)^2 \geqslant 0$, więc $(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 > 0$. Ponieważ równocześnie $x_2 - x_1 > 0$ na mocy założenia, więc w tym przypadku także $f(x_2) - f(x_1) > 0$. W konsekwencji $f(x_1) < f(x_2)$, czyli funkcja f jest rosnąca.

c) Zbadamy monotoniczność funkcji f danej wzorem $f(x) = x^2$. Dziedziną tej funkcji jest $D_f = \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i załóżmy, że $x_1 < x_2$. Obliczmy różnicę

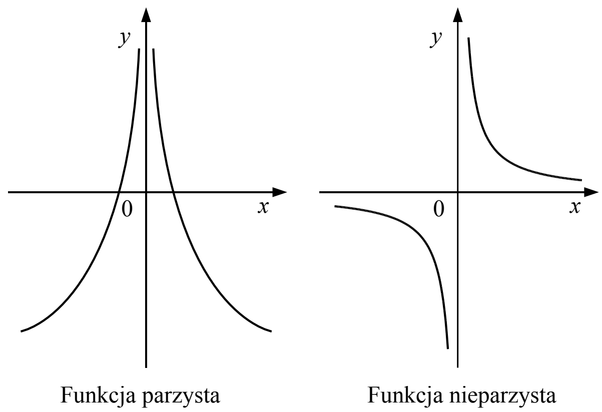
$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2)^2 - (x_1)^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Zauważmy, że w tym przypadku czynnik $x_2 - x_1$ jest dodatni na mocy założenia, natomiast drugi czynnik może być zarówno dodatni, jak i ujemny. Jeżeli jednak założymy dodatkowo, że $x_1, x_2 \leqslant 0$, to ponieważ argumenty te są różne, więc $x_2 + x_1 < 0$. Zatem $f(x_2) - f(x_1) < 0$, czyli $f(x_1) > f(x_2)$. W konsekwencji funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$. Podobnie, jeśli $x_1, x_2 \geqslant 0$, to ponieważ argumenty te są różne, więc $x_2 + x_1 > 0$. Zatem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, czyli $f(x_1) < f(x_2)$. W konsekwencji funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty)$.

Definicja 2.16 *Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$. Funkcję f nazywamy parzystą (odpowiednio nieparzystą), gdy dla dowolnego $x \in D_f$ zachodzi*

$$-x \in D_f \ \wedge \ f(-x) = f(x) \ \ (\text{odpowiednio } f(-x) = -f(x)).$$

Bezpośrednio z definicji widać, że jeżeli funkcja f jest parzysta lub nieparzysta, to jej dziedzina przedstawiona na osi liczbowej jest zbiorem symetrycznym względem punktu 0. Ponadto wykres funkcji parzystej jest osiowo symetryczny względem osi Oy, zaś wykres funkcji nieparzystej jest środkowo symetryczny względem początku układu. Oto przykładowe wykresy funkcji parzystej i nieparzystej



Rys. 2.3

Przykład 2.17 *a) Niech f będzie funkcją daną wzorem $f(x) = \frac{2}{x^3}$. Zbadamy czy funkcja ta ma jedną z dwóch zdefiniowanych wyżej własności. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zatem dziedzina ta jest symetryczna względem zera. Weźmy dowolne $x \in D_f$ i obliczmy*

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)^3} = \frac{2}{-x^3} = -\frac{2}{x^3} = -f(x).$$

W konsekwencji na mocy definicji funkcja f jest nieparzysta.

b) Zbadamy teraz funkcję f daną wzorem $f(x) = \sqrt{x+1}$. Dziedziną tej funkcji jest $D_f = \langle -1; \infty)$. Ponieważ dziedzina tej funkcji nie jest symetryczna względem zera, więc funkcja f nie może być ani parzysta, ani nieparzysta.

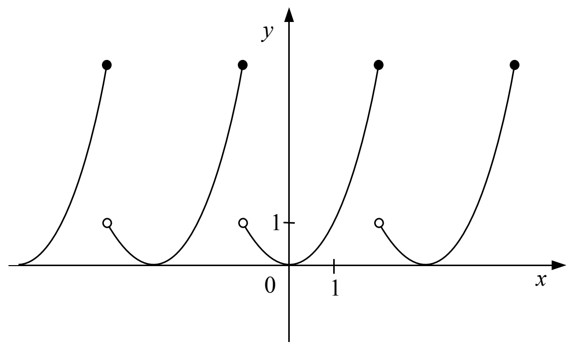
Definicja 2.18 *Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$. Funkcję f nazywamy okresową, gdy istnieje liczba $t \neq 0$ taka, że*

$$\bigwedge_{x \in D_f} [x + t \in D_f \ \wedge \ x - t \in D_f \ \wedge \ f(x+t) = f(x)].$$

Liczbę t nazywany okresem funkcji f.

Z definicji tej wynika, że jeżeli f jest funkcją okresową, to jej wykres jest sumą przystających do siebie części rozłożonych w poziomie w jednakowych odstępach. Widać ponadto, że jeżeli wiemy jak wygląda wykres tej funkcji na pewnym przedziale domknięto-otwartym o długości $|t|$, to będziemy potrafili narysować wykres tej funkcji nad całym zbiorem $\mathbb{R}$.

Przykład 2.19 *Narysujemy wykres funkcji f, o której wiemy, że jest okresowa o okresie 3 i na przedziale $(-1; 2\rangle$ zadana jest wzorem $f(x) = x^2$*



Rys. 2.4

Łatwo widać, że jeżeli f jest funkcją okresową o okresie t, to każda liczba postaci $m \cdot t$, gdzie m jest dowolną liczbą całkowitą różną od zera, jest także okresem funkcji f. Zatem każda funkcja okresowa ma nieskończenie wiele okresów. Wśród nich możemy wyróżnić okresy dodatnie. Przyjmiemy definicję

Definicja 2.20 *Jeżeli wśród okresów dodatnich funkcji okresowej f istnieje najmniejszy, to nazywamy, go okresem podstawowym i oznaczać będziemy symbolem T.*

Warunkowe sformułowanie tej definicji jest niezbędne, gdyż istnieją funkcje okresowe, dla których zbiór okresów dodatnich nie zawiera elementu najmniejszego. Na przykład funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

jest funkcją okresową, przy czym każda liczba wymierna jest jej okresem. Wśród wszystkich liczb wymiernych dodatnich nie istnieje najmniejsza.

Definicja 2.21 *Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taki argument x, dla którego $f(x) = 0$.*

Zauważmy, że geometrycznie miejsce zerowe jest odciętą punktu, w którym wykres funkcji przecina oś Ox.

2.4 Przekształcenia wykresów

Załóżmy, że znamy wykres W_f funkcji danej wzorem $y = f(x)$.

Wykres funkcji $g(x) = f(x) + q$ powstaje z wykresu W_f przez przesunięcie równoległe o q jednostek wzdłuż osi Oy (przesunięcie o wektor $[0, q]$).

Wykres funkcji $g(x) = f(x - p)$ powstaje z wykresu W_f przez przesunięcie równoległe o p jednostek wzdłuż osi Ox (przesunięcie o wektor $[p, 0]$).

Wykres funkcji $g(x) = k \cdot f(x)$ $(k > 0)$ powstaje z wykresu W_f przez k-krotne "rozciągnięcie" wzdłuż osi Oy (powinowactwo prostokątne o skali k i osi Ox).

Wykres funkcji $g(x) = f(k \cdot x)$ $(k > 0)$ powstaje z wykresu W_f przez $\frac{1}{k}$-krotne "rozciągnięcie" wzdłuż osi Ox (powinowactwo prostokątne o skali $\frac{1}{k}$ i osi Oy).

Wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ powstaje z wykresu W_f przez symetrię osiową względem osi Ox.

Wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ powstaje z wykresu W_f przez symetrię osiową względem osi Oy.

Wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$ otrzymujemy z wykresu W_f w następujący sposób: części wykresu W_f, które leżą nad osią Ox lub na tej osi pozostawiamy bez zmian, natomiast zamiast części leżących pod osią Ox rysujemy obrazy tych części w symetrii osiowej o osi Ox.

Wykres funkcji $g(x) = f(|x|)$ otrzymujemy z wykresu W_f w następujący sposób: część wykresu W_f, która odpowiada argumentom $x \geqslant 0$ pozostawiamy bez zmian, a następnie dorysowujemy obraz tej części w symetrii osiowej o osi Oy.

Przykład 2.22 *Wykorzystując znajomość wykresu funkcji $f(x) = x$, naszkicujemy wykres funkcji $g(x) = 2 \cdot ||3x - 1| - 1| + \frac{1}{2}$. Na wykresie funkcji f musimy kolejno wykonać następujące operacje:*

1. *"Rozciągnąć" wykres funkcji $y = x$ trzykrotnie w pionie, co da nam wykres funkcji zada-nej wzorem $y = 3x$.*

2. *Przesunąć o jednostkę w dół, co da nam wykres funkcji zadanej wzorem $y = 3x - 1$.*

3. *Wykonać operację przewidzianą dla modułu, czyli zamiast części wykresu leżących pod osią Ox wstawić osiowo symetryczne (o osi Ox) względem nich, co da nam wykres funkcji zadanej wzorem $y = |3x - 1|$.*

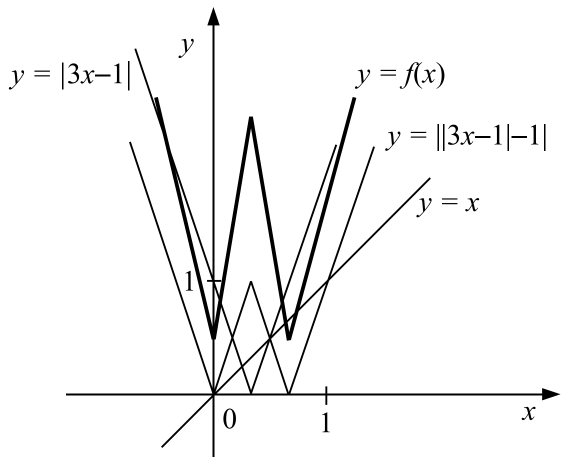
4. *Przesunąć otrzymany ostatnio wykres o jednostkę w dół, co da nam wykres funkcji danej wzorem $y = |3x - 1| - 1$.*

5. *Z otrzymanym wykresem wykonać operację taką, jak w 3., co da nam wykres funkcji $y = ||3x - 1| - 1|$.*

6. *Otrzymany wykres "rozciągnąć" dwukrotnie w pionie, co da nam wykres funkcji danej wzorem $y = 2 \cdot ||3x - 1| - 1|$.*

7. *Przesunąć otrzymany ostatnio wykres o pół jednostki do góry, co daje nam wykres funkcji f.*

Naszkicujemy niektóre (dla zachowania przejrzystości rysunku) z opisanych wyżej wykresów.

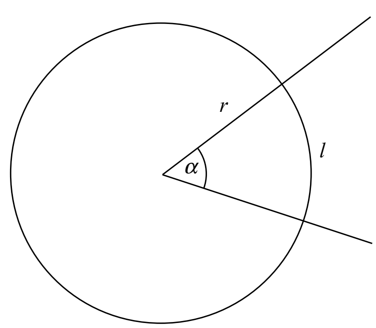


Rys. 2.5

2.5 Przegląd funkcji podstawowych

2.5.1 Funkcje trygonometryczne

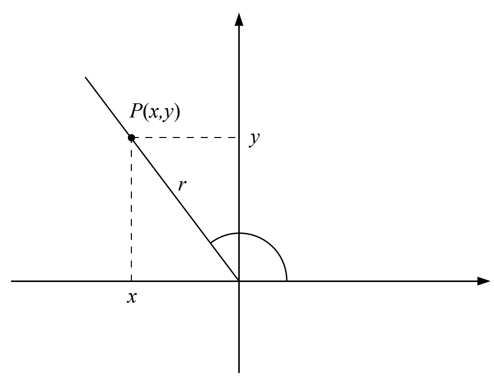
Na początku określimy miarę łukową kąta. Narysujmy dowolny kąt o mierze stopniowej α, a następnie nakreślmy okrąg o środku w wierzchołku tego kąta i dowolnym promieniu r. Załóżmy, że długość łuku będącego częścią wspólną kąta i okręgu wynosi l.



Rys. 2.6

Miarą łukową danego kąta będziemy nazywać stosunek $t = \frac{l}{r}$. Pokazuje się, że stosunek ten nie zależy od wyboru promienia okręgu. Można więc wziąć okrąg o promieniu jednostkowym i powiedzieć, że miara łukowa jest liczbą równą długości łuku wycinanego z okręgu o promieniu jednostkowym przez dany kąt. Stąd np. kąt pełny ma miarę łukową 2π, kąt półpełny ma miarę łukową π, kąt prosty ma miarę łukową $\frac{\pi}{2}$, kąt o mierze stopniowej 60^o ma miarę łukową $\frac{\pi}{3}$itd.

Zdefiniujemy najpierw funkcje trygonometryczne dla argumentów $t \in \langle 0; 2\pi)$. Weźmy dowolną liczbę t z tego przedziału i w układzie współrzędnych narysujmy kąt o mierze łukowej t, którego wierzchołek pokrywa się z początkiem układu współrzędnych, jedno ramię pokrywa się z dodatnią półosią Ox i jeśli kąt ten jest niezerowy, to drugie ramię leży w ten sposób, że dla każdego $x_0 > 0$ istnieje $y_0 > 0$ takie , że zbiór $\{(x_0, y) : 0 < y < y_0\}$ zawiera się w danym kącie (Rys. 2.7).



Rys. 2.7

Umówmy się, że o kącie, którego drugie ramię zawiera się np. w II ćwiartce układu współrzędnych będziemy mówili, że leży w II ćwiartce układu. Wybierzmy teraz dowolny punkt $P\,(x, y)$ leżący na drugim ramieniu kąta różny od wierzchołka i zdefiniujmy funkcje sinus, kosinus, tangens i kotangens liczby t odpowiednio wzorami

$$\begin{array}{ll} \sin t = \frac{y}{r} & \\ \cos t = \frac{x}{r} & \\ \operatorname{tg} t = \frac{y}{x} & \text{dla } x \neq 0, \text{ czyli } t \neq \frac{\pi}{2} \text{ i } t \neq \frac{3\pi}{2} \\ \operatorname{ctg} t = \frac{x}{y} & \text{dla } y \neq 0, \text{ czyli } t \neq 0 \text{ i } t \neq \pi, \end{array}$$

gdzie r jest odległością punktu P od początku układu współrzędnych, czyli $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Z twierdzenia Talesa wynika, że definicja powyższa jest poprawna, tzn. zdefiniowane wielkości nie zależą od wyboru punktu P, a tylko od miary kąta t. Mamy więc zdefiniowane funkcje sinus, kosinus, tangens i kotangens na przedziale $\langle 0; 2\pi)$ (ze stosownymi zastrzeżeniami dla tangensa i kotangensa). Definiujemy teraz funkcje trygonometryczne dowolnego rzeczywistego argumentu (ze stosownymi zastrzeżeniami dla tangensa i kotangensa) jako funkcje, które na przedziale $\langle 0; 2\pi)$ pokrywają się z określonymi powyżej i są okresowe o okresie 2π. Zauważmy, że o ile dziedziną tak określonych funkcji sinus i kosinus jest $\mathbb{R}$, o tyle dziedziną tangensa, który w $\langle 0; 2\pi)$ nie był określony w $\frac{\pi}{2}$ i w $\frac{3\pi}{2}$, jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem punktów postaci $\frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, zaś dziedziną kotangensa, który w $\langle 0; 2\pi)$ nie był określony w 0 i w π, jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem punktów postaci $k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Uogólnijmy pojęcie "leżenia" w I, II, III i IV ćwiartce układu. Jeżeli $t \in \mathbb{R}$, to liczbę tę można w jednoznaczny sposób zapisać w postaci

$$t = m \cdot 2\pi + t', \text{ gdzie } t' \in \langle 0; 2\pi) \text{ i } m \in \mathbb{Z}.$$

O t mówimy, że leży w tej samej ćwiartce układu, co t'.

Wprost z definicji funkcji trygonometrycznych daje się określić znak każdej z tych funkcji w poszczególnych ćwiartkach

	0	I ćw.	$\frac{\pi}{2}$	II ćw.	π	III ćw.	$\frac{3\pi}{2}$	IV ćw.
$\sin t$	0	+	1	+	0	−	−1	−
$\cos t$	1	+	0	−	−1	−	0	+
$\operatorname{tg} t$	0	+	nie ist.	−	0	+	nie ist.	−
$\operatorname{ctg} t$	nie ist.	+	0	−	nie ist.	+	0	−

Wykorzystując znane już wcześniej definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym możemy skonstruować tabelkę wartości funkcji sinus i kosinus dla pewnych szczególnych kątów z I ćwiartki

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Od tego miejsca zmieńmy oznaczenie argumentu. Będziemy dalej pisać $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ itd. Bezpośrednio z definicji daje się wykazać następujące własności funkcji trygonometrycznych

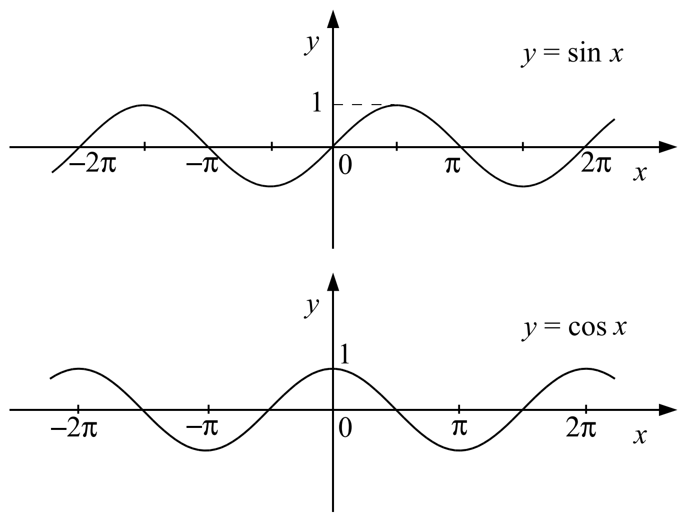
1. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą nierówności $|\sin x| \leqslant 1$ oraz $|\cos x| \leqslant 1$.
2. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi tożsamość zwana "jedynką trygonometryczną":
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{2.4}$$
gdzie symbol $\sin^2 x$ oznacza tyle samo, co $(\sin x)^2$ i odpowiednio $\cos^2 x$ oznacza tyle samo co $(\cos x)^2$. Zauważmy, że zachodzi także następujący fakt: jeżeli α, β są takimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha^2+\beta^2 = 1$, to istnieje $x \in \langle 0; 2\pi)$ takie, że
$$\alpha = \sin x \quad \text{i} \quad \beta = \cos x. \tag{2.5}$$
3. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$, które nie jest postaci $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ zachodzi tożsamość
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{2.6}$$

oraz dla każdego $x \in \mathbb{R}$, które nie jest postaci $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ zachodzi tożsamość

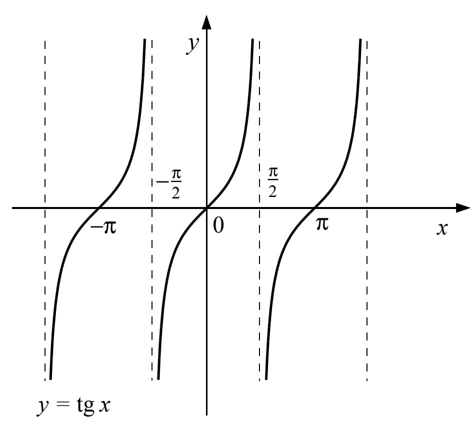
$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \tag{2.7}$$

4. Dla $x \neq \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ zachodzą tożsamości $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ oraz $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

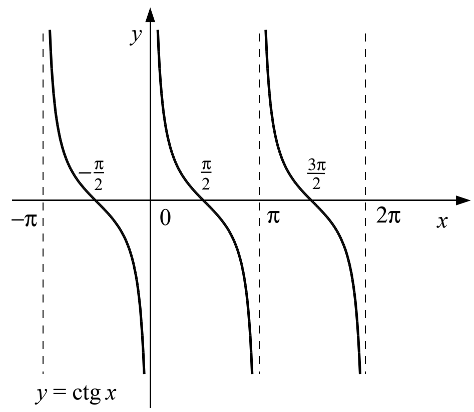
Naszkicujmy teraz wykresy funkcji trygonometrycznych



Rys. 2.8



Rys. 2.9



Rys. 2.10

Z wykresów łatwo odczytać takie własności funkcji trygonometrycznych, jak dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały, w któych funkcja jest rosnąca (odpowiednio malejąca). Zauważmy, że okresem podstawowym funkcji sinus i kosinus jest 2π, zaś okresem podstawowym funkcji tangens i kotangens jest π.

Ważnymi wzorami obowiązującymi dla funkcji trygonometrycznych są tzw. wzory redukcyjne, które są uogólnieniem znanego już wcześniej z trójkąta prostokątnego związku np. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. Zamiast wypisywać wzory redukcyjne, których jest bardzo dużo omówimy sposób ich tworzenia. Umówmy się, że jeżeli f oznacza którąkolwiek funkcję trygonometryczną, to przez f^* oznaczymy jej kofunkcję, czyli dla sinusa będzie to kosinus, dla kotangensa będzie to tangens itd. Lewa strona wzoru redukcyjnego będzie zawsze postaci $f\left(m \cdot \frac{\pi}{2} \pm x\right)$, gdzie f jest dowolną funkcją trygonometryczną, zaś m jest liczbą całkowitą. Po prawej stronie wzoru piszemy $f(x)$, jeśli m jest liczbą parzystą lub piszemy $f^*(x)$, gdy m jest liczbą nieparzystą. Dodatkowo z przodu stawiamy znak $+$ lub $-$ w zależności od tego jaki znak ma funkcja f w tej ćwiartce układu do której należy liczba $m \cdot \frac{\pi}{2} \pm x$, gdzie x traktujemy tutaj tak jakby leżało w I ćwiartce układu.

Przykład 2.23 *Obliczymy wartość wyrażenia*

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{7}{2}\pi - x\right) \cdot \cos\left(\frac{5}{2}\pi + x\right)}{\operatorname{ctg}(5\pi + x) \cdot \sin\left(-\frac{3}{2}\pi - x\right)}.$$

Zajmijmy się poszczególnymi czynnikami. W wyrażeniu $\frac{7}{2}\pi - x$ *mamy nieparzystą wielokrotność liczby* $\frac{\pi}{2}$ *oraz liczba* $\frac{7}{2}\pi - x$ *leży w III ćwiartce, w której tangens jest dodatni. Zatem* $\operatorname{tg}\left(\frac{7}{2}\pi - x\right) = \operatorname{ctg} x$. *W wyrażeniu* $\frac{5}{2}\pi + x$ *mamy nieparzystą wielokrotność liczby* $\frac{\pi}{2}$, *przy czym liczba* $\frac{5}{2}\pi + x$ *leży w II ćwiartce, w której kosinus jest ujemny. Zatem* $\cos\left(\frac{5}{2}\pi + x\right) = -\sin x$. *W wyrażeniu* $5\pi + x$ *mamy parzystą wielokrotność liczby* $\frac{\pi}{2}$, *przy czym liczba* $5\pi + x$ *leży w III ćwiartce, w* *której kotangens jest dodatni. Zatem* $\operatorname{ctg}(5\pi + x) = \operatorname{ctg} x$*. Wreszcie w wyrażeniu* $-\frac{3}{2}\pi - x$ *mamy nieparzystą wielokrotność liczby* $\frac{\pi}{2}$*, przy czym* $-\frac{3}{2}\pi - x$ *leży w I ćwiartce, w której sinus jest dodatni. Zatem* $\sin\left(-\frac{3}{2}\pi - x\right) = \cos x$*. Ostatecznie*

$$\gamma = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot (-\sin x)}{\operatorname{ctg} x \cdot \cos x} = -\operatorname{tg} x$$

na mocy wzorów (2.6) i (2.7).

Zauważmy, że funkcje sinus, tangens i kotangens są funkcjami nieparzystymi, zaś funkcja kosinus jest funkcją parzystą.

Funkcje trygonometryczne spełniają cały szereg interesujących własności, które podzielimy na grupy

1. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{2.8}$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \tag{2.9}$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{2.10}$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \tag{2.11}$$

   Zauważmy przy tym, że używając wzorów redukcyjnych można łatwo znając pierwszy z tych wzorów wyprowadzić pozostałe. Ponadto łatwo z tych wzorów, używając związku między funkcją tangens a funkcjami sinus i kosinus, wyprowadzić wzory na tangens i kotangens sumy (różnicy):

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(x+y) &= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \\
\operatorname{tg}(x-y) &= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \\
\operatorname{ctg}(x+y) &= \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} \\
\operatorname{ctg}(x-y) &= \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}.
\end{aligned}$$

2. Funkcje trygonometryczne argumentu podwojonego

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= 1 - 2\sin^2 x \\
&= 2\cos^2 x - 1.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Wzory te wynikają ze wzorów na sinus i kosinus sumy, przy czym dwie dodatkowe wersje wzoru na kosinus $2x$ wynikają z "jedynki trygonometrycznej". Z wzorów na tangens i kotangens sumy dostajemy

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$
$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}.$$

3. Wyrażenie sinusa i kosinusa za pomocą tangensa argumentu połówkowego

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \tag{2.14}$$
$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \tag{2.15}$$

Oczywiście tożsamości te obowiązują dla tych x, dla których jest określony $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, tzn dla $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Wzory na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{2.16}$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \tag{2.17}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{2.18}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \tag{2.19}$$

W tym przypadku także używając wzorów redukcyjnych można z pierwszego wzoru wyprowadzić trzy pozostałe.

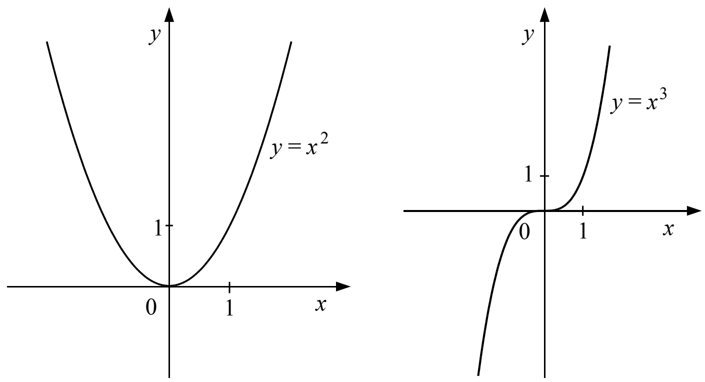
2.5.2 Funkcja potęgowa

Definicja 2.24 *Funkcją potęgową nazywamy każdą funkcję f zadaną wzorem*

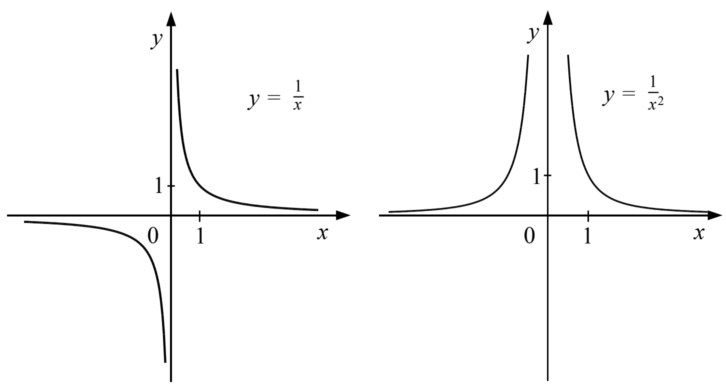
$$f(x) = x^{\alpha},$$

gdzie α jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

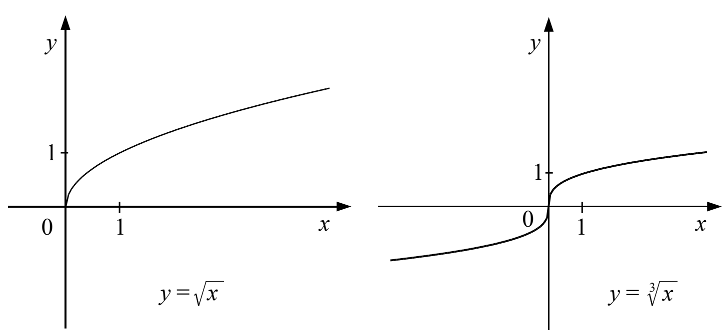
Zauważmy, że dziedzina tak zdefiniowanej funkcji zależy od parametru α: jeśli $\alpha \in \mathbb{N}$, to $D_f = \mathbb{R}$, jeśli $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \leqslant 0$, to $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, jeśli $\alpha = \frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną parzystą, to $D_f = \langle 0;\infty)$, jeśli $\alpha = -\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną parzystą, to $D_f = (0,\infty)$. Dziedziny wszystkich funkcji potęgowych zawierają w sobie przedział $(0,\infty)$. Wykresy niektórych funkcji potęgowych przedstawimy na rysunkach



Rys. 2.11



Rys. 2.12



Rys. 2.13

2.5.3 Funkcja liniowa

Definicja 2.25 *Funkcją liniową nazywamy każdą funkcję zadaną wzorem postaci*

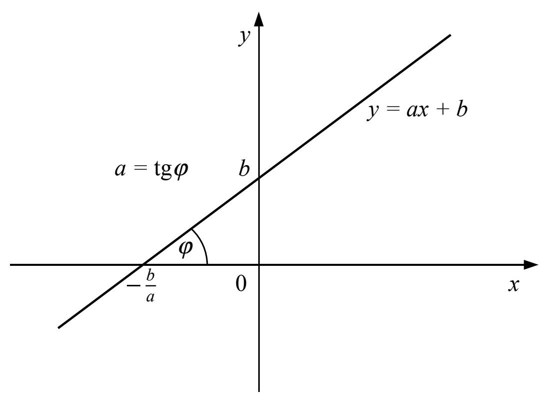
$$f(x) = ax + b,$$

gdzie a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Twierdzenie 2.26 *Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest linia prosta przechodząca przez punkt $(0, b)$ leżący na osi Oy i nachylona do dodatniej półosi osi Ox pod takim kątem φ, że $\operatorname{tg}\varphi = a$.*

Uwaga 2.27 *Twierdzenie powyższe jest prawdziwe (wyłącznie!) w przypadku, gdy na obu osiach układu współrzędnych przyjęliśmy te same jednostki.*

Z twierdzenia tego mamy interpretację geometryczną współczynników występujących we wzorze opisującym funkcję liniową. Mianowicie, współczynnik a zwany *współczynnikiem kierunkowym* jest tangensem kąta nachylenia prostej do dodatniej półosi osi Ox, zaś b zwane *wyrazem wolnym* jest rzędną punktu, w którym prosta przecina oś Oy.



Rys. 2.14

Ponieważ tangens kąta ostrego jest dodatni, zerowego — zerowy, zaś kąta rozwartego ujemny, więc z powyższego twierdzenia wynika monotoniczność funkcji liniowej. Mianowicie, jeśli funkcja liniowa dana jest wzorem $f(x) = ax + b$, to

- dla $a = 0$ funkcja f jest stała,
- dla $a > 0$ funkcja f jest rosnąca,
- dla $a < 0$ funkcja f jest malejąca.

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$, jak łatwo sprawdzić, w przypadku $a \neq 0$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe $x = -\frac{b}{a}$.

2.5.4 Funkcja kwadratowa

Definicja 2.28 *Funkcją kwadratową lub inaczej trójmianem kwadratowym nazywamy każdą funkcję zadaną wzorem postaci*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, przy czym $a \neq 0$.

Zauważmy, że wzór opisujący trójmian kwadratowy daje się przekształcić do tzw. *postaci kanonicznej*, która umożliwi nam rysowanie wykresu dowolnej funkcji kwadratowej

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \end{aligned}$$

gdzie symbolem Δ oznaczyliśmy liczbę $b^2 - 4ac$ zwaną *wyróżnikiem trójmianu kwadratowego*. Zauważmy, że z przedostatniej postaci w powyższych przekształceniach daje się wyprowadzić wzory na miejsca zerowe funkcji kwadratowej:

- Jeżeli $\Delta < 0$, to wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest dodatnie dla każdego argumentu x. Zatem w tym przypadku funkcja kwadratowa nie ma w ogóle miejsc zerowych.
- Jeżeli $\Delta = 0$, to podstawiając $t = x + \frac{b}{2a}$ otrzymujemy równanie $at^2 = 0$, które ma dokładnie jeden pierwiastek $t = 0$, czyli $x + \frac{b}{2a} = 0$ i ostatecznie w tym przypadku funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe $x = -\frac{b}{2a}$.
- Jeżeli $\Delta > 0$, to podstawiając $t = x + \frac{b}{2a}$ i przyrównując wyrażenie w nawiasie kwadratowym do zera dostajemy równanie

  $$t^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0.$$

  Stosując wzór na różnicę kwadratów mamy

  $$\left(t - \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}\right)\left(t + \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}\right) = 0.$$

Ponieważ w jednym nawiasie wyrażenie $\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$ występuje z minusem, a w drugim z plusem, więc możemy opuścić w nim moduł

$$\left(t-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(t+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0. \tag{2.20}$$

Stąd

$$t=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad t=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Wracając do zmiennej x dostajemy

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

i w konsekwencji

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{2.21}$$

Ostatecznie w tym przypadku funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe wyrażające się wzorami (2.21).

Zauważmy, że jeżeli $\Delta = 0$ i przez x_0 oznaczymy jedyne miejsce zerowe funkcji kwadratowej, to postać kanoniczna tej funkcji zapisze się jako

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_0\right)^2. \tag{2.22}$$

Dlatego o miejscu zerowym x_0 mówimy, że jest pierwiastkiem podwójnym. Jeżeli $\Delta > 0$ i miejsca zerowe funkcji kwadratowej oznaczymy przez x_1 i x_2, to z postaci kanonicznej dostajemy

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right). \tag{2.23}$$

Prawe strony w (2.22) i (2.23) nazywamy postacią iloczynową trójmianu kwadratowego. Jeżeli $\Delta < 0$, to trójmian nie ma postaci iloczynowej.

Z wzorów na miejsca zerowe funkcji kwadratowej (2.21) możemy wyprowadzić wzory Viete'a, które opisują zależność między sumą i iloczynem pierwiastków a współczynnikami trójmianu kwadratowego. Jeżeli symbolami x_1, x_2 oznaczymy miejsca zerowe przy założeniu, że $\Delta > 0$, to mamy

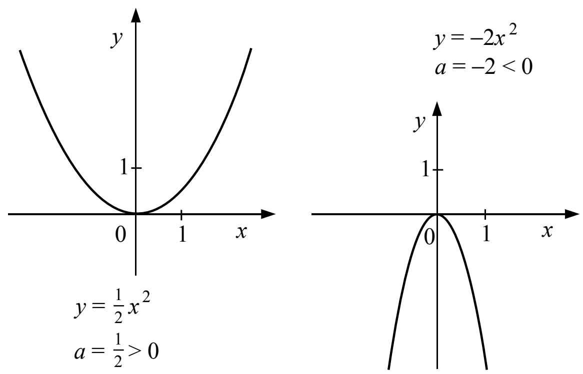
$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}, \tag{2.24}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}. \tag{2.25}$$

Dla $\Delta = 0$ powyższe wzory także są prawdziwe pod warunkiem, że przyjmiemy, że w tym przypadku trójmian ma dwa pierwiastki oba równe x_0.

Oczywiście, gdy $\Delta < 0$, to wzory Viete'a nie mają sensu.

Zajmijmy się teraz wykresem funkcji kwadratowej. Z 2.5.2 wiemy już jak wygląda wykres funkcji danej wzorem $y = x^2$. Krzywą będącą tym wykresem nazywamy *parabolą*. Wierzchołkiem tej paraboli jest początek układu współrzędnych. Wiadomo z 2.4, jak z tego wykresu uzyskać wykres funkcji zadanej równaniem $y = ax^2$. Wystarczy "rozciągnąć" a-krotnie wykres funkcji $y = x^2$ równolegle do osi Oy przy $a > 0$, zaś w przypadku $a < 0$ wystarczy przekształcić wykres funkcji $y = x^2$ przez symetrię osiową o osi Ox, a następnie "rozciągnąć" $|a|$-krotnie równolegle do osi Oy.



Rys. 2.15

Widać więc, że dla $a > 0$ parabola o równaniu $y = ax^2$ ma ramiona zwrócone do góry, zaś dla $a < 0$ — do dołu. Ponadto widać, że im większy jest $|a|$, tym ramiona paraboli są bardziej strome.

Zauważmy dalej, że jeżeli $a > 0$, to funkcja zadana równaniem $y = ax^2$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty)$. Ponadto w tym przypadku funkcja ta osiąga swoją najmniejszą wartość dla argumentu $x = 0$ i ta najmniejsza wartość wynosi 0. Jeżeli $a < 0$, to funkcja zadana wzorem $y = ax^2$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 0; \infty)$ oraz osiąga największą wartość w 0 i ta największa wartość wynosi 0.

Rozważmy teraz sytuację ogólną $f(x) = ax^2 + bx + c$. Mamy postać kanoniczną

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

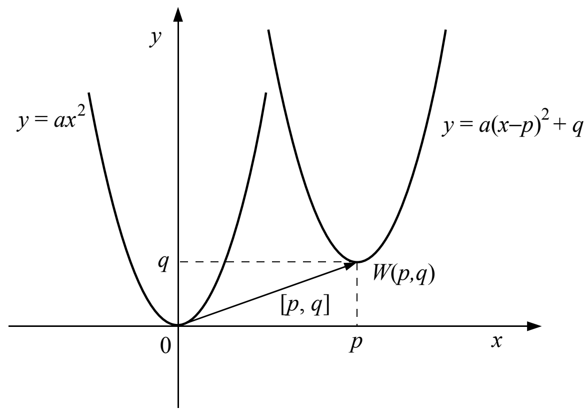
Wprowadźmy oznaczenia

$$p = \frac{-b}{2a} \quad , \quad q = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Wtedy postać kanoniczna zapisze się jako

$$f(x) = a(x - p)^2 + q.$$

W konsekwencji na mocy 2.4 wykres funkcji f powstaje z wykresu funkcji danej wzorem $y = ax^2$ przez przesunięcie równoległe o wektor $[p, q]$, czyli przez przesunięcie o p w poziomie i o q w pionie.

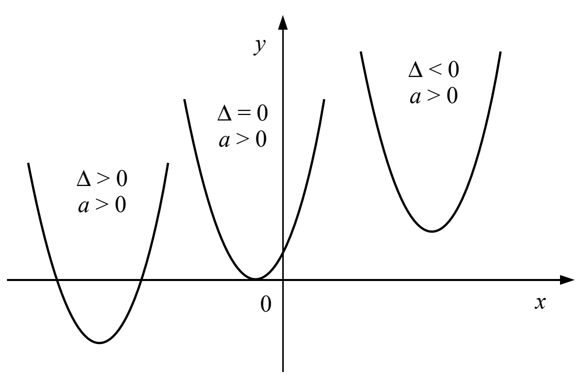


Rys. 2.16

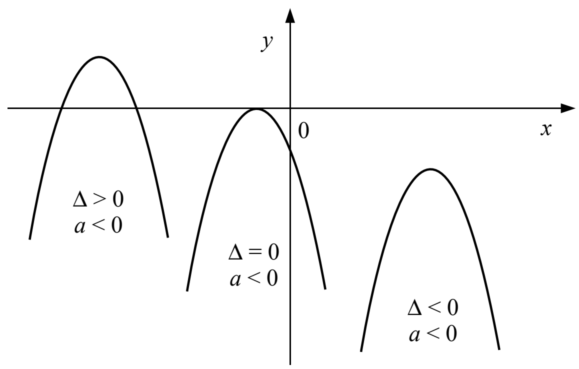
Zatem otrzymana parabola będzie miała wierzchołek w punkcie (p, q). Często współrzędne wierzchołka oznacza się przez (x_w, y_w). Mamy więc

$$\begin{cases} x_w = \frac{-b}{2a} \\ y_w = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases} .$$

Ponadto widać, że dla $a > 0$ funkcja f jest malejąca w przedziale $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right\rangle$ i rosnąca w przedziale $\left\langle \frac{-b}{2a}; \infty\right)$ oraz dla argumentu $\frac{-b}{2a}$ przyjmuje swoją wartość najmniejszą, która wynosi $\frac{-\Delta}{4a}$. Dla $a < 0$ funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right\rangle$ i malejąca w przedziale $\left\langle \frac{-b}{2a}; \infty\right)$ oraz dla argumentu $\frac{-b}{2a}$ przyjmuje swoją wartość największą, która wynosi $\frac{-\Delta}{4a}$.



Rys. 2.17



Rys. 2.18

Rysunki 2.17 i 2.18 przedstawiają możliwe warianty położenia wykresu funkcji kwadratowej w zależności od znaku wyróżnika i znaku współczynnika a

2.5.5 Wielomiany

Definicja 2.29 *Niech $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wielomianem stopnia n nazywamy funkcję $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem postaci*

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, ...a_n$ są liczbami rzeczywistymi, które nazywamy współczynnikami wielomianu, przy czym $a_n \neq 0$. Dodatkowo funkcję $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tożsamościowo równą zeru nazywamy wielomianem zerowym. Przyjmuje się, że wielomian zerowy nie ma stopnia.

Jeżeli W jest wielomianem stopnia n, to będziemy pisać $\deg W = n$.

Zauważmy, że poznane już przez nas funkcje liniowa i kwadratowa są szczególnymi przypadkami wielomianów. Funkcja liniowa jest wielomianem stopnia co najwyżej pierwszego, zaś funkcja kwadratowa jest wielomianem stopnia drugiego.

Ponieważ wielomiany są funkcjami, więc możemy mówić o ich równości. Okazuje się, że istnieje charakteryzacja równości wielomianów oparta na własnościach ich współczynników. Zachodzi twierdzenie

Twierdzenie 2.30 *Wielomiany W, V są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $\deg W = \deg V$ i współczynniki występujące przy jednakowych potęgach argumentu w tych wielomianach są sobie równe.*

Niech W będzie wielomianem. Miejsca zerowe funkcji W nazywać będziemy *pierwiastkami wielomianu W*.

Zachodzi twierdzenie o dzieleniu wielomianu z resztą analogiczne do odpowiedniego twierdzenia o dzieleniu z resztą liczb całkowitych

Twierdzenie 2.31 *Załóżmy, ze W, P są wielomianami, przy czym P nie jest wielomianem zerowym. Wówczas istnieją wyznaczone jednoznacznie wielomiany Q, R takie, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość*

$$W(x) = P(x)\,Q(x) + R(x)\,, \tag{2.26}$$

przy czym $\deg R < \deg P$ *lub R jest wielomianem zerowym.*

Przykład 2.32 *Na przykładzie pokażemy, jak w praktyce wyznaczać wielomiany Q, R. Niech $W(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5x - 1$ i $P(x) = x^2 - x + 2$. Używamy zapisu analogicznego do pisemnego dzielenia liczb*

$$\begin{array}{l}
\quad x^2 - 2x - 2 \\
\hline
\left(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5x - 1\right) : \left(x^2 - x + 2\right) \\
\underline{-x^4 + x^3 - 2x^2} \\
\qquad -2x^3 \qquad +5x \\
\qquad \underline{2x^3 - 2x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad -2x^2 + 9x - 1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{2x^2 - 2x + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 7x + 3
\end{array}$$

W kolejnych krokach wykonaliśmy tu następujące operacje:

1. *Podzieliliśmy składnik najwyższego stopnia pochodzący od dzielnej przez składnik najwyższego stopnia w dzielniku i otrzymany wynik zapisaliśmy nad poziomą kreską nad dzielną.*

2. *Pomnożyliśmy otrzymany powyżej wynik przez wszystkie składniki dzielnika zmieniając znaki na przeciwne i wynik tej operacji podpisaliśmy pod dzielną.*

3. *Zsumowaliśmy wynik otrzymany w 2. z wyrażeniem stojącym bezpośrednio powyżej.*

Wielomian, który znalazł się nad górną poziomą kreską jest ilorazem, czyli przy oznaczeniach w ostatnim twierdzeniu jest to $Q(x)$, zaś pod dolną kreską otrzymaliśmy resztę, czyli przy oznaczeniach z ostatniego twierdzenia — $R(x)$. Na mocy tego twierdzenia mamy więc: dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5x - 1 = \left(x^2 - x + 2\right)\left(x^2 - 2x - 2\right) + (7x + 3)\,.$$

Definicja 2.33 *Niech W, P będą wielomianami, przy czym P nie jest wielomianem zerowym. Mówimy, że wielomian W jest podzielny przez wielomian P, gdy istnieje wielomian Q taki, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość*

$$W(x) = P(x)\,Q(x)\,.$$

Ze względu na jednoznaczność w Twierdzeniu 2.31 oznacza to, że dzielenie z resztą wielomianu W przez wielomian P musi dać w tym przypadku resztę, która jest wielomianem zerowym.

Zachodzi następujące bardzo ważne twierdzenie

Twierdzenie 2.34 (Bezout) *Liczba r jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian W jest podzielny przez dwumian $x - r$.*

Zauważmy, że z Twierdzenia 2.31 dla $P(x) = x - r$ wynika, że reszta R z dzielenia wielomianu W przez P, która w tym przypadku jest wielomianem stałym, bo stopnia co najwyżej zero, wynosi $W(r)$. Istotnie wystarczy w równości (2.26) podstawić r w miejsce x.

Zachodzi następujace bardzo ważne

Twierdzenie 2.35 *Każdy wielomian daje się przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych i kwadratowych o ujemnym wyróżniku.*

W praktyce dokonanie rozkładu dowolnego wielomianu na takie czynniki bywa bardzo trudne, a nawet niemożliwe. Tylko w nielicznych przypadkach jesteśmy w stanie dokonać takiego rozkładu. Mamy jednak twierdzenia, które w pewnych sytuacjach ułatwiają rozłożenie wielomianu.

Twierdzenie 2.36 *Załóżmy, że wszystkie współczynniki wielomianu*

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

są liczbami całkowitymi. Jeżeli r jest wymiernym pierwiastkiem wielomianu W, to $r = \frac{p}{q}$ gdzie p jest dzielnikiem współczynnika a_0, zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n i ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny.

Wniosek 2.37 *Załóżmy, że wszystkie współczynniki wielomianu*

$$W(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

są liczbami całkowitymi. Jeżeli r jest wymiernym pierwiastkiem wielomianu W, to r jest liczbą całkowitą, która jest dzielnikiem liczby a_0.

Przykład 2.38 *a) Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 6x + 18$. Zauważmy, że daje się dostrzec pewne proporcje między kolejnymi współczynnikami wielomianu. Podejrzewamy więc, że można rozłożyć ten wielomian grupując składniki i wyłączając wspólne czynniki przed nawiasy*

$$\begin{aligned} W(x) &= \left(x^5 - 3x^4\right) - \left(x^3 - 3x^2\right) - (6x + 18) \\ &= x^4 (x - 3) - x^2 (x - 3) - 6 (x - 3) \\ &= (x - 3) \left(x^4 - x^2 - 6\right). \end{aligned}$$

Aby rozłożyć wielomian z drugiego nawiasu zastosujemy teorię poznaną w 2.5.4. W wielomianie tym podstawmy $t = x^2$. *Wówczas przyjmie on postać* $t^2 - t - 6$. *Wyróżnik tego trójmianu wynosi* $\Delta = 25$, *czyli jego pierwiastkami są*

$$t = -2 \quad \vee \quad t = 3.$$

Zatem postacią iloczynową tego trójmianu jest $(t+2)(t-3)$, *czyli wracając do zmiennej* x *dostajemy*

$$x^4 - x^2 - 6 = \left(x^2 + 2\right)\left(x^2 - 3\right)$$

i z wzoru na różnicę kwadratów

$$x^4 - x^2 - 6 = \left(x^2 + 2\right)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right),$$

przy czym wyróżnik trójmianu $x^2 + 2$ *jest ujemny. Ostatecznie*

$$W(x) = (x-3)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x^2 + 2\right)$$

jest poszukiwanym rozkładem na czynniki wielomianu W.

b) Rozłożymy teraz na czynniki wielomian $W(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 8x - 8$. *W tym przypadku proporcje między współczynnikami nie są widoczne. Skorzystamy więc z Wniosku 2.37. Wolno nam to zrobić, bo współczynniki danego wielomianu są całkowite i współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest jedynką. Z wniosku tego wynika, że jedynymi liczbami wymiernymi, które mogą być pierwiastkami wielomianu* W *są podzielniki wyrazu wolnego, czyli podzielniki* 8. *Zatem jedynymi pierwiastkami wymiernymi mogą być liczby* $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. *Sprawdzimy która z tych liczb jest pierwiastkiem:*

$$\begin{aligned} W(1) &= 1 - 4 + 2 + 8 - 8 = -1 \neq 0 \\ W(-1) &= 1 + 4 + 2 - 8 - 8 = -9 \neq 0 \\ W(2) &= 16 - 32 + 8 + 16 - 8 = 0. \end{aligned}$$

Zatem 2 *jest pierwiastkiem wielomianu* W, *więc na mocy twierdzenia Bezouta wielomian ten jest podzielny przez dwumian* $x - 2$. *Wykonajmy dzielenie*

$$\begin{array}{l}
\quad x^3 - 2x^2 - 2x + 4 \\
\overline{\left(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 8x - 8\right)} : (x-2) \\
\underline{-x^4 + 2x^3} \\
\qquad -2x^3 + 2x^2 \\
\qquad\quad \underline{2x^3 - 4x^2} \\
\qquad\qquad -2x^2 + 8x \\
\qquad\qquad\quad \underline{2x^2 - 4x} \\
\qquad\qquad\qquad 4x - 8 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-4x + 8}
\end{array}$$

Zatem

$$W(x) = (x-2)\left(x^3 - 2x^2 - 2x + 4\right).$$

Zauważmy, że do drugiego czynnika możemy już zastosować metode poznaną w przykładzie a):

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 2x + 4 &= x^2(x-2) - 2(x-2) \\ &= (x-2)\left(x^2-2\right) = (x-2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$W(x) = (x-2)^2\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right).$$

c) Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 2$. *Tu nie da się zastosować Wniosku 2.37, bo współczynnik przy najwyższej potędze nie jest jedynką. Musimy skorzystać z Twierdzenia 2.36. Dzielnikami wyrazu wolnego są* $\pm1, \pm2$, *zaś dzielnikami współczynnika przy najwyższej potędze są* $\pm1, \pm3$. *Zatem jedynymi pierwiastkami wymiernymi wielomianu* W *mogą być liczby* $\pm1, \pm\frac{1}{3}, \pm2, \pm\frac{2}{3}$. *Sprawdzimy, czy któraś z tych liczb jest pierwiastkiem wielomianu* W

$$\begin{aligned} W(1) &= 3 - 2 + 5 + 2 = 8 \neq 0 \\ W(-1) &= -3 - 2 - 5 + 2 = -8 \neq 0 \\ W\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{3}{27} - \frac{2}{9} + \frac{5}{3} + 2 = \frac{32}{9} \neq 0 \\ W\left(-\frac{1}{3}\right) &= -\frac{3}{27} - \frac{2}{9} - \frac{5}{3} + 2 = 0. \end{aligned}$$

Zatem $-\frac{1}{3}$ *jest pierwiastkiem wielomianu* W, *więc na mocy twierdzenia Bezouta wielomian ten jest podzielny przez dwumian* $x + \frac{1}{3}$. *Wykonamy dzielenie*

$$\begin{array}{l} \quad 3x^2 - 3x + 6 \\ \hline \left(3x^3 - 2x^2 + 5x + 2\right) : \left(x + \dfrac{1}{3}\right) \\ \underline{-3x^3 - x^2} \\ \qquad -3x^2 + 5x \\ \qquad \underline{3x^2 + x} \\ \qquad\qquad 6x + 2 \\ \qquad\qquad \underline{-6x - 2} \end{array}$$

Zatem

$$W(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 - 3x + 6\right) = (3x+1)\left(x^2 - x + 2\right).$$

Trójmian z ostatniego nawiasu ma wyróżnik ujemny, więc rozkład ten jest już poszukiwanym rozkładem.

Zauważmy, że w Przykładzie 2.38 b) w rozkładzie na czynniki pojawiają się dwa czynniki postaci $x-2$, czyli tak, jakby pierwiastek 2 wielomianu W był liczony dwukrotnie. W związku z tym wprowadzamy następujące określenie

Definicja 2.39 *Niech r będzie pierwiastkiem wielomianu W i $k \in \mathbb{N}$. Pierwiastek r nazywamy k-krotnym, gdy wielomian W dzieli się przez $(x-r)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-r)^{k+1}$.*

Z Twierdzenia 2.35 wynika następujące twierdzenie, które bywa nazywane podstawowym twierdzeniem algebry

Twierdzenie 2.40 *Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.*

2.5.6 Funkcje wymierne

Definicja 2.41 *Funkcją wymierną nazywamy każdą funkcję, którą da się zapisać w postaci*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdzie P, Q są wielomianami, przy czym Q nie jest wielomianem zerowym. Dziedziną funkcji wymiernej f zadanej powyższym wzorem jest zbiór

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

Szczególnym przypadkiem funkcji wymiernej jest funkcja homograficzna.

Definicja 2.42 *Funkcją homograficzną nazywamy funkcję postaci*

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

gdzie $c \neq 0$ i $ad - bc \neq 0$.

Każdą funkcję homograficzną daje się sprowadzić do postaci kanonicznej

$$f(x) = \frac{k}{x-p} + q. \tag{2.27}$$

Zauważmy, że postać ta pozwala narysować wykres funkcji homograficznej. Istotnie, znamy już wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$ (2.5.2). Stosując teraz do tego wykresu metody poznane w 2.4 otrzymujemy wykres funkcji (2.27). Na przykładzie pokażemy, jak w praktyce dojść do postaci kanonicznej.

Przykład 2.43 *Sprowadzimy do postaci kanonicznej funkcję homograficzną zadaną wzorem*

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}.$$

Wykonując dzielenie z resztą licznika powyższego ułamka przez jego mianownik dostajemy

$$2x+3 = 2(x+2) - 1.$$

Zatem wstawiając do wzoru opisującego funkcję f mamy

$$f(x) = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = \frac{-1}{x+2} + 2.$$

Otrzymaliśmy postać (2.27), w której $k = -1$, $p = -2$, $q = 2$. Zatem aby otrzymać wykres f, musimy wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$ przekształcić najpierw za pomocą symetrii osiowej o osi Ox, a następnie przesunąć o -2 w poziomie i o 2 w pionie (przesunąć o wektor $[-2, 2]$).

Z pomocą powyższego przykładu możemy wyznaczyć wzory na współczynniki k, p, q we wzorze (2.27):

$$\begin{aligned} k &= \frac{bc - ad}{c^2}, \\ p &= -\frac{d}{c}, \\ q &= \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

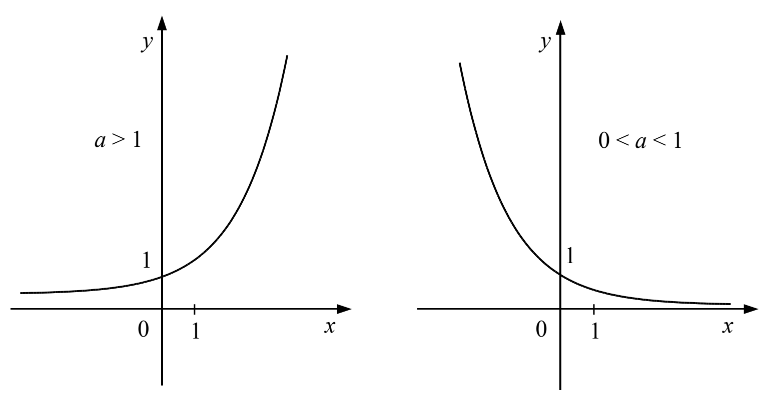
2.5.7 Funkcje wykładnicze

Definicja 2.44 *Funkcją wykładniczą nazywamy każdą funkcję f zadaną wzorem*

$$f(x) = a^x,$$

gdzie a jest ustalona liczbą rzeczywistą taką , że $a > 0$ i $a \neq 1$.

Naszkicujemy wykresy funkcji wykładniczej w dwóch przypadkach $0 < a < 1$ oraz $a > 1$



Rys. 2.19

Z wykresów daje się odczytać podstawowe własności funkcji wykładniczej:

- Dziedziną funkcji wykładniczej w obu przypadkach jest zbiór $\mathbb{R}$.
- Zbiorem wartości w obu przypadkach jest zbiór $(0; \infty)$.
- Funkcja ta nie ma miejsc zerowych.
- W obu przypadkach wartością funkcji wykładniczej w 0 jest 1.
- Dla $0 < a < 1$ funkcja wykładnicza o podstawie a jest malejąca, zaś dla $a > 1$ jest rosnąca.
- W obu przypadkach jest różnowartościowa.

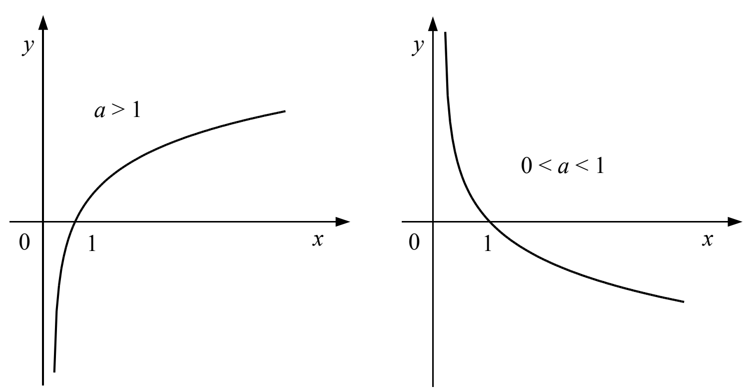
2.5.8 Funkcje logarytmiczne

Definicja 2.45 *Funkcją logarytmiczną nazywamy każdą funkcję f zadaną wzorem*

$$f(x) = \log_a x,$$

gdzie a jest ustalona liczbą rzeczywistą taką, że $a > 0$ i $a \neq 1$.

Zauważmy, że z Definicji 1.33 wynika, że funkcja logarytmiczna o podstawie a jest funkcją odwrotną względem funkcji wykładniczej o podstawie a. Zatem potrafimy, opierając się na wykresie funkcji wykładniczej, naszkicować wykresy funkcji logarytmicznych



Rys. 2.20

Z wykresów daje się odczytać podstawowe własności funkcji logarytmicznej:

- Dziedziną funkcji logarytmicznej w obu przypadkach jest zbiór $(0; \infty)$.
- Zbiorem wartości jest $\mathbb{R}$.
- Jedynym miejscem zerowym jest 1.

- Dla $0 < a < 1$ funkcja logarytmiczna o podstawie a jest malejąca, zaś dla $a > 1$ jest rosnąca.
- W obu przypadkach funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa.

2.6 Pojęcie funkcji elementarnej

Definicja 2.46 *Funkcją elementarną nazywać będziemy każdą funkcję liczbową zmiennej rzeczywistej, która daje się zapisać za pomocą jednego wzoru, który może zawierać*

- *stałe,*
- *działania arytmetyczne na skończonej liczbie argumentów,*
- *złożenia funkcji,*
- *znaki takich funkcji, jak: potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne.*

Przykładem funkcji elementarnej jest więc

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{3^{\sin x}}} \cdot \log_2 \left(x^{\frac{7}{2}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right).$$

Zauważmy, ze funkcja dana wzorem $f(x) = |x|$ jest funkcją elementarną, bo

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Rozdział 3

Równania i nierówności

3.1 Wiadomości wstępne

Definicja 3.1 *Pierwiastkiem równania lub nierówności nazywamy każdą liczbę, która spełnia równanie lub nierówność. Rozwiązaniem równania lub nierówności nazywamy zbiór wszystkich pierwiastków równania lub nierówności.*

Rozwiązanie równania lub nierówności polega więc na znalezieniu zbioru wszystkich pierwiastków tego równania lub nierówności.

Przykład 3.2 *a) Rozwiązaniem równania $x^2 + 4 = 0$ jest zbiór pusty.*
b) Rozwiązaniem równania $x^2 - 4 = 0$ jest zbiór dwuelementowy $\{-2, 2\}$.
c) Rozwiązaniem nierówności $x^2 - 4 \leqslant 0$ jest przedział $\langle -2; 2 \rangle$.

3.1.1 Rozwiązywanie równań metodą równań równoważnych

Stosując tę metodę, przekształcamy dane równanie do innego, równoważnego poprzedniemu, czyli takiemu, który ma to samo rozwiązanie.

Twierdzenie 3.3 *Jeżeli do obu stron równania dodamy to samo wyrażenie, to otrzymamy równanie równoważne danemu:*

$$a = b \iff a + c = b + c \text{ dla dowolnych } a, b, c.$$

Twierdzenie 3.4 *Jeżeli obie strony równania pomnożymy przez to samo wyrażenie różne od zera, to otrzymamy równanie równoważne danemu:*

$$a = b \iff a \cdot c = b \cdot c \text{ dla dowolnych } a, b, c, \text{ przy czym } c \neq 0.$$

Przykład 3.5 *Rozwiążemy równanie*

$$2x - 5 = x + 2.$$

Do obu stron równania dodajemy 5*:*

$$2x - 5 + 5 = x + 2 + 5$$

$$2x = x + 7,$$

do obu stron równania dodajemy $-x$*:*

$$2x - x = 7$$

$$x = 7.$$

Rozwiązaniem naszego równania jest zbiór jednoelemenytowy $\{7\}$*.*

3.1.2 Rozwiązywanie nierówności metodą nierówności równoważnych

Twierdzenie 3.6 *Jeżeli do obu stron nierówności dodamy to samo wyrażenie, to otrzymamy nierówność równoważną danej:*

$$a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c \text{ dla dowolnych } a, b, c.$$

Twierdzenie 3.7 *Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy przez to samo wyrażenie, przyjmujące tylko wartości dodatnie, to otrzymamy nierówność równoważną danej:*

$$a < b \Longleftrightarrow a \cdot c < b \cdot c \text{ dla dowolnych } a, b, c, \text{ przy czym } c > 0.$$

Twierdzenie 3.8 *Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy przez to samo wyrażenie, przyjmujące tylko wartości ujemne i zmienimy zwrot nierówności na przeciwny, to otrzymamy nierówność równoważną danej:*

$$a < b \Longleftrightarrow a \cdot c > b \cdot c \text{ dla dowolnych } a, b, c, \text{ przy czym } c < 0.$$

Ostatnie dwa twierdzenia pozostają prawdziwe, gdy nierówności ostre zastąpimy nieostrymi.

Przykład 3.9 *Rozwiążemy nierówność*

$$-5x - 4 \geqslant 2x + 3.$$

Do obu stron dodajemy 4

$$-5x - 4 + 4 \geqslant 2x + 3 + 4$$

$$-5x \geqslant 2x + 7.$$

Do obu stron dodajemy $-2x$

$$-5x - 2x \geqslant 2x + 7 - 2x$$

$$-7x \geqslant 7.$$

Mnożymy obie strony nierówności przez $-\frac{1}{7}$ *i zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny*

$$x \leqslant -1.$$

Rozwiązaniem danej nierówności jest przedział $(-\infty, -1\rangle$*.*

3.1.3 Metoda analizy starożytnych

Metoda ta polega na przekształceniu wyjściowego równania do postaci łatwiejszej w rozwiązaniu i o tej własności, że każdy pierwiastek wyjściowego równania jest równocześnie pierwiastkiem nowo otrzymanego równania, ale niekoniecznie odwrotnie. Po takiej operacji wśród pierwiastków mogą się znaleźć takie, które nie są pierwiastkami równania wyjściowego. Nazywamy je *pierwiastkami obcymi* i chcąc otrzymać rozwiązanie równania danego, musimy je wyeliminować ze zbioru pierwiastków. Tak więc sprawdzenie jest częścią konieczną tej metody.

Przykład 3.10 *a) Rozwiążemy rownanie*

$$\sqrt{x^2 - 5x + 10} = -x.$$

Podnosząc stronami do kwadratu otrzymujemy równanie

$$x^2 - 5x + 10 = x^2,$$

które nie musi być równoważne danemu, ale jeśli jakaś liczba jest pierwiastkiem danego równania, to jest także rozwiązaniem tego ostatniego równania. Przekształcając dalej dostajemy

$$-5x + 10 = 0$$

$$-5x = -10$$

$$x = 2.$$

Sprawdzamy, czy otrzymany pierwiastek spełnia dane w przykładzie równanie. Podstawiając do lewej i prawej strony danego równania otrzymujemy

$$L = \sqrt{4 - 10 + 10} = 2,$$
$$P = -2.$$

Zatem $L \neq P$, czyli liczba 2 jest pierwiastkiem obcym (nie jest pierwiastkiem równania danego). W konsekwencji rozwiązaniem równania danego jest zbiór pusty.

b) Rozwiążemy równanie

$$\sqrt{x^2 + x + 5} = -x.$$

Podobnie, jak poprzednio mamy

$$x^2 + x + 5 = x^2$$

$$x + 5 = 0$$

$$x = -5.$$

Sprawdzamy, czy liczba -5 jest rozwiązaniem równania wyjściowego

$$L = \sqrt{25 - 5 + 5} = 5,$$
$$P = -(-5) = 5.$$

Otrzymaliśmy, że $L = P$*, zatem rozwiązaniem równania* $\sqrt{x^2+x+5} = -x$ *jest zbiór* $\{-5\}$.

c) Rozwiążemy równanie

$$\sqrt{x^2-5} = x.$$

Podobnie, jak porzednio

$$x^2 - 5 = x^2$$
$$-5 = 0.$$

Otrzymane równanie jest sprzeczne, czyli równanie wyjściowe też jest sprzeczne.

3.1.4 Rozwiązywanie równań i nierówności metodą graficzną

Metoda ta polega na narysowaniu w jednym układzie współrzędnych wykresów funkcji, które znajdują się po lewej oraz po prawej stronie równania lub nierówności, a następnie odczytanie z rysunku odpowiednich zależności. Dla równania odczytujemy odcięte punktów wspólnych wykresów, zaś dla nierówności odczytujemy przedziały, w których jeden wykres leży nad drugim. Zauważmy, że metoda ta często daje niedokładne wyniki, w związku z czym rzadko jest używana.

Przykład 3.11 *a) Rozwiążemy równanie*

$$|x+1| + 2|x| = 3.$$

Narysujemy w tym celu w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji

$$f_1(x) = |x+1| + 2|x| \text{ oraz } f_2(x) = 3.$$

Aby naszkicować wykres funkcji f_1 *musimy rozważyć przypadki. Jakie to będą przypadki odczytamy z rysunku. W układzie współrzędnych naszkicujemy wykresy obu wyrażeń podmodułowych (Rys. 3.1). Z rysunku tego widać natychmiast, że do rozważenia są trzy przypadki:* $x \in (-\infty; -1)$, $x \in \langle -1; 0)$, $x \in \langle 0; \infty)$ *(pionowe przerywane linie poprowadzone przez miejsca zerowe wyrażeń podmodułowych dzielą oś* Ox *na przypadki). Widać także jaki znak przyjmują wyrażenia podmodułowe w każdym z wyróżnionych przedziałów, np. w przedziale* $(-1; 0)$ *wyrażenie* $x+1$ *jest dodatnie, bo wykres leży nad osią* Ox*, zaś wyrażenie* x *jest ujemne, bo wykres leży pod osią* Ox*. Wiadomo więc czemu równe są moduły w każdym z wyróżnionych przedziałów, np. w przedziale* $(-1; 0)$ *mamy* $|x+1| = x+1$ *i* $|x| = -x$*. Zapiszemy więc trzy przypadki*

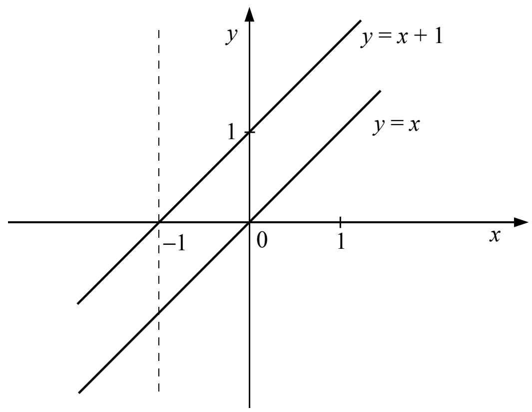
1) $x \in (-\infty; -1)$ *wówczas* $f_1(x) = -(x+1) + 2(-x) = -3x - 1$.

2) $x \in \langle -1; 0)$ *wówczas* $f_1(x) = x + 1 + 2(-x) = -x + 1$.

3) $x \in \langle 0; \infty)$ *wówczas* $f_1(x) = x + 1 + 2x = 3x + 1$.

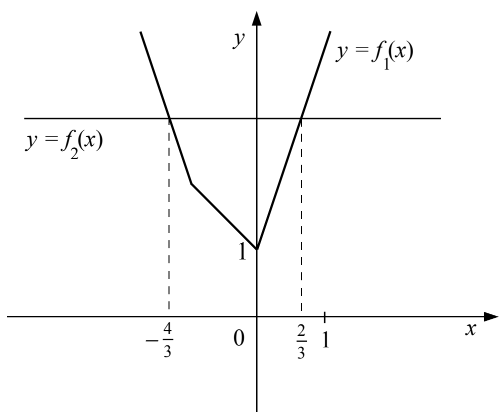
Ostatecznie

$$f_1(x) = \begin{cases} -3x-1 & dla\ x \in (-\infty; -1) \\ -x+1 & dla\ x \in \langle -1; 0) \\ 3x+1 & dla\ x \in \langle 0; \infty) \end{cases} .$$



Rys. 3.1

Szkicujemy wykresy funkcji f_1 *oraz* f_2



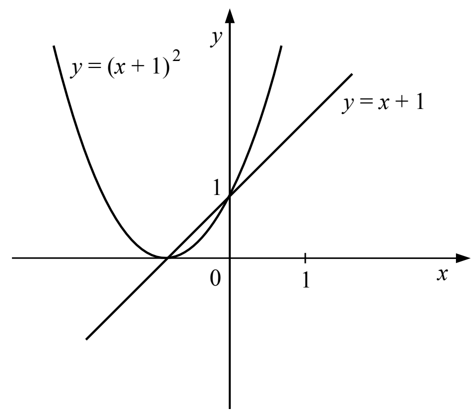
Rys. 3.2

Otrzymujemy w ten sposób dwuelementowe rozwiązanie $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.
b) Rozwiążemy nierówność

$$(x+1)^2 < x+1.$$

W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji

$$f_1(x) = (x+1)^2 \;\; oraz \;\; f_2(x) = x+1.$$



Rys. 3.3

Wykres funkcji f_2 leży nad wykresem funkcji f_1 dla argumentów z przedziału $(-1;0)$ i ten właśnie zbiór jest rozwiązaniem danej nierówności.

3.2 Równania liniowe

Definicja 3.12 *Równanie postaci $ax+b=0$, gdzie a,b są dowolnymi współczynnikami rzeczywistymi, zaś x jest szukaną niewiadomą, nazywamy równaniem liniowym z jedną niewiadomą.*

Równanie liniowe $ax+b=0$ posiada dokładnie jeden pierwiastek $x_0=-\frac{b}{a}$, gdy $a\neq 0$. Jeśli $a=0$ i $b=0$, to równanie przyjmuje postać $0=0$, czyli każda liczba rzeczywista spełnia to równanie. Nazywamy je wówczas *równaniem tożsamościowym.* Jeżeli $a=0$ i $b\neq 0$, to równanie przyjmuje postać $b=0$ (podczas, gdy $b\neq 0$). Żadna liczba nie spełnia tego równania. Jest to równanie *sprzeczne.*

Przykład 3.13 *a) Rozwiążemy równanie*

$$8\,(3x-5)-5\,(2x-8)=20+4x$$

$$24x-40-10x+40=20+4x$$

$$14x-4x=20$$

$$10x=20$$

$$x=2.$$

Rozwiązaniem równania jest zbiór jednoelementowy $\{2\}$.

b) Określimy liczbę pierwiastków równania

$$mx-2=x+m$$

w zależności od parametru m. Stosując metodę równań równoważnych otrzymujemy kolejno

$$mx - x = m + 2$$

$$(m-1)\,x = m + 2. \tag{3.1}$$

Jest to równanie liniowe, może posiadać zatem jeden pierwiastek lub nieskończenie wiele pierwiastków lub może nie mieć ani jednego pierwiastka.

Jeżeli $m-1 \neq 0$, czyli $m \neq 1$, to można obie strony równania (3.1) pomnożyć przez $\frac{1}{m-1}$ i wówczas otrzymujemy dokładnie jeden pierwiastek postaci

$$x = \frac{m+2}{m-1}.$$

Jeżeli $m = 1$, to równanie (3.1) przyjmuje postać

$$0 = 3.$$

Jest to równanie sprzeczne.

Zatem dla $m \neq 1$ równanie ma dokładnie jeden pierwiastek postaci $x = \frac{m+2}{m-1}$. Dla $m = 1$ równanie nie posiada pierwiastków.

3.3 Nierówności liniowe

Definicja 3.14 *Nierówność, której jedną ze stron stanowi wyrażenie $ax + b$, drugą zaś 0, gdzie a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, zaś x jest szukaną niewiadomą, nazywamy nierównością liniową.*

Jeżeli $a = 0$, to nierówność jest tożsamościowa, np. $3 > 0$, $-5 \leqslant 0$ lub sprzeczna, np. $3 < 0$, $-5 \geqslant 0$.

Jeżeli $a \neq 0$, to rozwiązaniem tej nierówności jest jeden z przedziałów:
1) $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$ lub $\left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$, gdy nierówność jest ostra ($<$, $>$),
2) $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right\rangle$ lub $\left\langle -\frac{b}{a}; \infty\right)$, gdy nierówność jest nieostra ($\leqslant$, $\geqslant$).

Przykład 3.15 *a) Znajdziemy rozwiązanie następującej nierówności*

$$-2x + \frac{1}{4} < \frac{5-4x}{3} + x.$$

Mnożymy obie strony przez 12

$$-24x + 3 < 20 - 16x + 12x$$

$$-24x + 3 < 20 - 4x$$

$$-20x < 17 \mid \cdot \left(-\frac{1}{20}\right)$$

$$x > -\frac{17}{20}.$$

Rozwiązaniem nierówności jest zatem przedział $\left(-\frac{17}{20};\infty\right)$.

b) Rozwiążemy nierówność

$$x-\frac{1}{2}\geqslant\frac{x}{2}-4x+6$$

$$x-\frac{x}{2}+4x\geqslant 6+\frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{2}x\geqslant\frac{13}{2}\ \mid\cdot\frac{2}{9}$$

$$x\geqslant\frac{13}{9}.$$

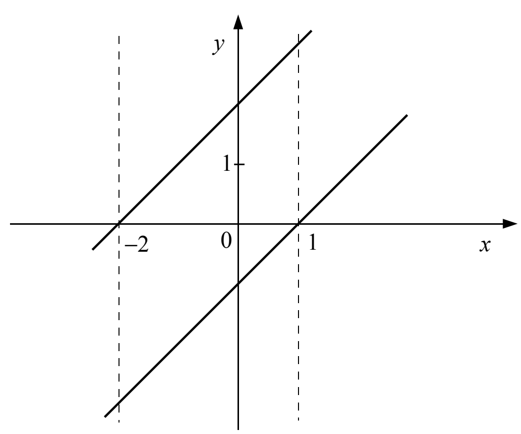
Rozwiązaniem nierówności jest więc przedział $\left\langle\frac{13}{9};\infty\right)$.

3.4 Moduł w równaniach i nierównościach liniowych

Przykład 3.16 *a) Rozwiążemy równanie*

$$|x+2|+|x-1|=3.$$

Szkicujemy wykresy wyrażeń podmodułowych



Rys. 3.4

Rozważymy więc trzy przypadki

1) $x\in(-\infty;-2)$. *Wtedy równanie ma postać*

$$-x-2-x+1=3$$

$$-2x=4$$

$$x = -2 \notin (-\infty; -2)\,.$$

Oznacza to, że w przedziale $(-\infty; -2)$ równanie nie ma pierwiastków.

2) $x \in \langle -2; 1)$. Wtedy równanie ma postać

$$x + 2 - x + 1 = 3$$

$$3 = 3.$$

Jest to równanie tożsamościowe, tzn. każda liczba $x \in \langle -2; 1)$ jest pierwiastkiem równania.

3) $x \in \langle 1; \infty)$. Wtedy równanie ma postać

$$x + 2 + x - 1 = 3$$

$$2x = 2$$

$$x = 1 \in \langle 1; \infty)\,.$$

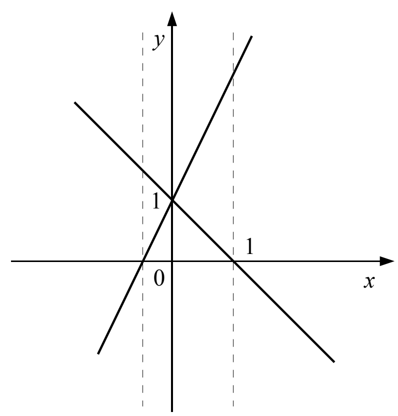
Oznacza to, że w przedziale $\langle 1; \infty)$ równanie ma jeden pierwiastek $x = 1$.

Ostatecznie rozwiązaniem równania jest przedział $\langle -2; 1\rangle$.

b) Rozwiążemy nierówność modułową

$$|1 - x| - |2x + 1| \geqslant x + 2.$$

Szkicujemy wykresy wyrażeń podmodułowych



Rys. 3.5

Rozważymy więc trzy przypadki

1) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. Wtedy nierówność ma postać

$$1 - x + 2x + 1 \geqslant x + 2$$

$$2 \geqslant 2.$$

Jest to nierówność tożsamościowa, więc rozwiązaniem w tym przypadku jest przedział $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

2) $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; 1\right)$. *Wtedy nierówność ma postać*

$$1 - x - 2x - 1 \geqslant x + 2$$

$$-4x \geqslant 2$$

$$x \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Biorąc część wspólną tego rozwiązania z przedziałem $\left\langle -\frac{1}{2}; 1\right)$, *otrzymujemy rozwiązanie w tym przypadku:* $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

3) $x \in \langle 1; \infty)$. *Wtedy nierówność ma postać*

$$-1 + x - 2x - 1 \geqslant x + 2$$

$$-2x \geqslant 4$$

$$x \leqslant -2.$$

Część wspólna tego rozwiązania z przedziałem $\langle 1; \infty)$ *jest pusta więc w tym przypadku rozwiązanie jest puste.*

Ostatecznie sumując rozwiązania wszystkich przypadków dostajemy rozwiązanie danej nierówności: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle$.

Jeżeli nierówność zawiera tylko jedną wartość bezwzględną, to można nieco prościej rozwiązywać takie nierówności wykorzystując własności modułu (paragraf 1.4).

Przykład 3.17 *a) Rozwiążemy nierówność*

$$|1 - 2x| - 3 < 0.$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności

$$|1 - 2x| < 3,$$

a ta na mocy własności 8 z 1.4 jest równoważna nierówności podwójnej

$$-3 < 1 - 2x < 3.$$

Dodając stronami -1 *a następnie mnożąc stronami przez* $-\frac{1}{2}$ *dostajemy*

$$-1 < x < 2.$$

Rozwiązaniem nierówności jest przedział $(-1; 2)$.

b) Rozwiążemy nierówność

$$|x + 2| + x - 3 \geqslant 0.$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności

$$|x+2| \geqslant 3-x,$$

a ta na mocy własności 9 z 1.4 jest równoważna alternatywie

$$x+2 \geqslant 3-x \quad \vee \quad x+2 \leqslant x-3.$$

Stąd mamy

$$\begin{aligned} 2x \geqslant 1 \quad &\vee \quad 0 \leqslant -5 \\ x \geqslant \frac{1}{2} \quad &\vee \quad x \in \varnothing. \end{aligned}$$

Sumując te rozwiązania dostajemy rozwiązanie nierówności danej: $x \in \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right)$.

3.5 Układy dwóch równań z dwiema niewiadomymi

Definicja 3.18 *Równaniem liniowym o dwóch zmiennych nazywamy równanie postaci*

$$Ax + By = C, \tag{3.2}$$

gdzie $A^2 + B^2 > 0$.

Twierdzenie 3.19 *Zbiorem punktów, których współrzędne spełniają równanie (3.2) (wykresem równania) jest linia prosta.*

Wiadomo więc co to jest układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi. Jest to układ postaci

$$\begin{cases} Ax + By &= C \\ A'x + B'y &= C' \end{cases},$$

gdzie $A^2 + B^2 > 0$ i $A'^2 + B'^2 > 0$.

Wykresem każdego z powyższych równań jest prosta. Zatem mamy na płaszczyźnie dwie proste, które mogą być równoległe i różne — wtedy układ jest *sprzeczny*, albo mogą się pokrywać — wtedy układ nazywamy *nieoznaczonym* i jego rozwiązanie zawiera nieskończenie wiele punktów (wszystkie punkty prostej będącej wykresem obu równań), albo proste te mogą się przecinać w jednym punkcie — wtedy układ ten nazywamy *oznaczonym* i rozwiązanie jest zbiorem jednoelementowym.

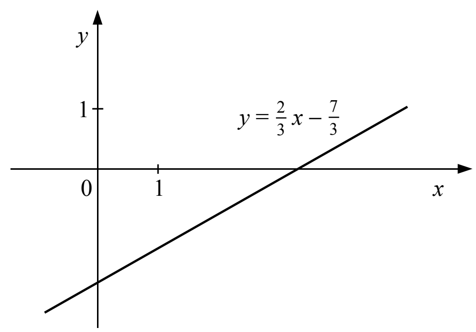
Przykład 3.20 *a) Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 7 \\ -4x + 6y &= -14 \end{cases}.$$

Aby narysować wykresy przekształcamy równania. Z pierwszego mamy

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}.$$

Z drugiego dostajemy dokładnie to samo. Zatem mamy następujący rysunek



Rys. 3.6

Układ jest nieoznaczony i rozwiązaniem naszego układu jest zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych postaci $\left(x, \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}\right)$.

b) Rozważmy układ równań

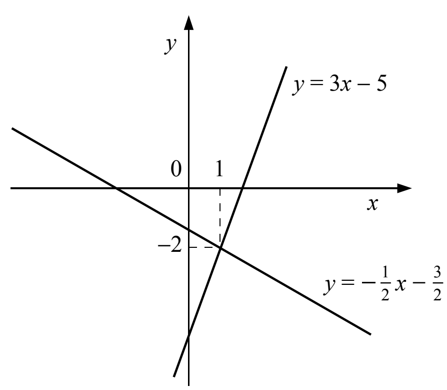
$$\begin{cases} x + 2y &= -3 \\ 3x - y &= 5 \end{cases}.$$

Przekształcamy równania wchodzące w skład układu

$$\begin{cases} y &= -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y &= 3x - 5 \end{cases}.$$

Szkicujemy wykresy tych dwóch równań (Rys. 3.7). Z rysunku widać, że rozwiązaniem jest dokładnie jeden punkt $(1, -2)$. *Inaczej rozwiązaniem jest*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$$



Rys. 3.7

Metodę podstawiania w rozwiązywaniu układu równań przedstawimy na przykładzie

Przykład 3.21 *Rozwiążemy układ równań*

$$\begin{cases} -2x + 3y & = 0 \\ 3x - 2y & = 5 \end{cases} .$$

Z pierwszego równania wyznaczamy x i otrzymujemy układ

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ 3x - 2y & = 5 \end{cases}$$

równoważny wyjściowemu. Podstawiamy obliczone x do drugiego równania

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ 3 \cdot \frac{3}{2}y - 2y & = 5 \end{cases} .$$

Z drugiego równania mamy teraz

$$\frac{5}{2}y = 5,$$

czyli

$$y = 2,$$

a wtedy z pierwszego

$$x = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

Ostatecznie rozwiązaniem układu równań jest

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} .$$

Podobnie, metodę przeciwnych współczynników przedstawimy tylko na przykładzie.

Przykład 3.22 *Rozwiążemy układ równań*

$$\begin{cases} 2x - 3y & = 7 & | \cdot 5 \\ 5x + 7y & = -13 & | \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 15y & = 35 \\ -10x - 14y & = 26 \end{cases} .$$

Dodajemy teraz równania stronami. To daje nam

$$-29y = 61,$$

czyli

$$y = -\frac{61}{29}$$

Układ wyjściowy jest równoważny układowi

$$\begin{cases} y = -\frac{61}{29} \\ 2x - 3y & = 7 \end{cases},$$

przy czym na drugim miejscu w tym układzie równie dobrze mogłoby być drugie z równań wyjściowych. Podstawiając obliczone y do drugiego równania dostajemy

$$\begin{cases} 2x = 7 - \frac{183}{29} = \frac{20}{29} \\ y = -\frac{61}{29} \end{cases},$$

czyli ostatecznie

$$\begin{cases} x = \frac{10}{29} \\ y = -\frac{61}{29} \end{cases}.$$

Dysponujemy jeszcze jedną metodą rozwiązywania układów równań liniowych. Jest to metoda wyznacznikowa. Dla układu

$$\begin{cases} Ax + By & = C \\ A'x + B'y & = C' \end{cases} \tag{3.3}$$

obliczamy następujące wyrażenia zwane *wyznacznikami*

$$W = \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = AB' - A'B,$$

$$W_x = \begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix} = CB' - C'B,$$

$$W_y = \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} = AC' - A'C.$$

Zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.23 *Jeżeli $W \neq 0$, to układ (3.3) jest oznaczony i jego rozwiązanie wyraża się wzorami Cramera:*

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \end{cases}.$$

Jeżeli $W = 0$ i przynajmniej jedno z wyrażeń W_x lub W_y jest różne od zera, to układ jest sprzeczny. Jeżeli $W = 0$ i $W_x = 0$ i $W_y = 0$, to układ jest nieoznaczony i jego rozwiązaniem jest zbiór wszystkich punktów leżących na prostej opisanym którymkolwiek z równań układu (3.3).

Przykład 3.24 *a) Rozwiążemy układ równań*

$$\begin{cases} x - 3y & = 7 \\ 2x - 7y & = -3 \end{cases}$$

Obliczamy wyznaczniki

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) - 2 \cdot (-3) = -1,$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-7) - (-3) \cdot (-3) = -58,$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 2 \cdot (-3) = 13.$$

Ponieważ $W \neq 0$, *więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie*

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} = \frac{-58}{-1} = 58 \\ y = \frac{W_y}{W} = \frac{13}{-1} = -13 \end{cases}.$$

b) Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} m^2x + y & = 1 \\ x + y & = m \end{cases}.$$

Odpowiemy na pytanie, jak zależy ilość rozwiązań układu od parametru m. *Obliczamy wyznaczniki*

$$W = \begin{vmatrix} m^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 1,$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m,$$

$$W_y = \begin{vmatrix} m^2 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 1.$$

Wyznacznik W *jest różny od zera dla* $m \neq 1$ *i* $m \neq -1$. *Wtedy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie*

$$\begin{cases} x = \frac{1-m}{m^2-1} = -\frac{1}{m+1} \\ y = \frac{m^3-1}{m^2-1} = \frac{m^2+m+1}{m+1} \end{cases}.$$

Jeżeli $m = 1$, *to* $W_x = 0$ *i* $W_y = 0$, *czyli układ jest nieoznaczony i jego rozwiązaniami są wszystkie punkty prostej o równaniu* $x + y = 1$, *czyli* $y = -x + 1$. *Jeżeli* $m = -1$, *to* $W_x = 2 \neq 0$, *więc w tym przypadku układ jest sprzeczny, czyli rozwiązanie jest zbiorem pustym.*

3.6 Równania kwadratowe

Definicja 3.25 *Równanie postaci*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdzie x *jest szukaną niewiadomą, zaś* a, b, c *dowolnymi liczbami rzeczywistymi i* $a \neq 0$ *nazywamy równaniem kwadratowym.*

Z 2.5.4 znamy już warunki istnienia pierwiastków takiego równania oraz wzory na pierwiastki.

Przykład 3.26 *a) Rozwiążemy równanie*

$$4x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie równania: $\Delta = 25 - 32 = -7 < 0$. *Zatem równanie nie posiada pierwiastków.*

b) Rozwiążemy równanie

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Wyróżnik lewej strony wynosi $\Delta = 9 - 4 \cdot (-4) = 4 + 16 = 25 > 0$. *Zatem istnieją dwa pierwiastki równania:*

$$x = \frac{-3-5}{2} = -4 \quad \vee \quad x = \frac{-3+5}{2} = 1.$$

Rozwiązaniem równania jest zbiór $\{-4, 1\}$.

c) Rozwiążemy równanie

$$2x^4 + 4x^2 - 16 = 0. \tag{3.4}$$

Należy tutaj dokonać podstawienia $t = x^2$. *Zakładamy przy tym, że* $t \geqslant 0$. *Wówczas równanie przyjmuje postać*

$$2t^2 + 4t - 16 = 0.$$

Obie strony mnożymy przez $\frac{1}{2}$

$$t^2 + 2t - 8 = 0. \tag{3.5}$$

Obliczamy wyróżnik $\Delta = 4 - 4 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$, $\sqrt{\Delta} = 6$. *Istnieją więc dwa pierwiastki równania (3.5):*

$$t = \frac{-2-6}{2} = -4 \quad \vee \quad t = \frac{-2+6}{2} = 2.$$

Założenie $t \geqslant 0$ *spełnia tylko pierwiastek* $t = 2$. *Wracając do podstawienia, otrzymujemy* $2 = x^2$, *a stąd* $x = \sqrt{2}$ *lub* $x = -\sqrt{2}$. *Zatem rozwiązaniem równania (3.4) jest zbiór* $\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$.

3.7 Nierówności kwadratowe

Definicja 3.27 *Nierównością kwadratową nazywamy nierówność postaci* $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ *lub* $ax^2 + bx + c < 0$ *lub* $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ *lub* $ax^2 + bx + c > 0$, *gdzie* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *i* x *jest niewiadomą.*

Rozwiązywanie nierówności np. postaci $ax^2 + bx + c \geqslant 0$:

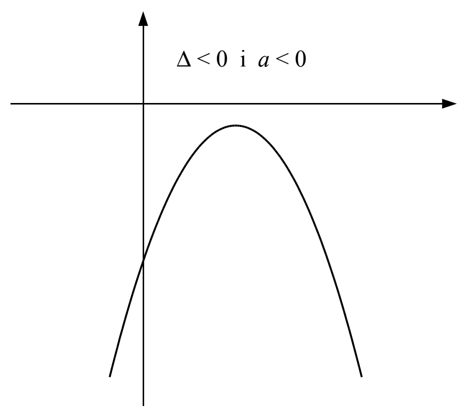
1) Rozwiązujemy równanie $ax^2 + bx + c = 0$.

2) Szkicujemy wykres funkcji danej wzorem $y = ax^2 + bx + c$, wykorzystując znalezione wcześniej pierwiastki trójmianu (o ile istnieją).

3) Sprawdzamy, która część wykresu leży ponad osią lub na osi Ox.

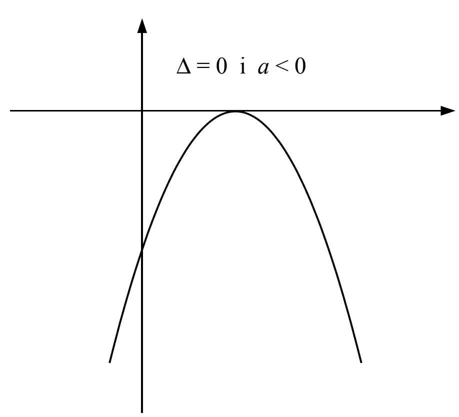
Mogą zajść następujące przypadki:

- nierówność ma rozwiązanie będące zbiorem pustym



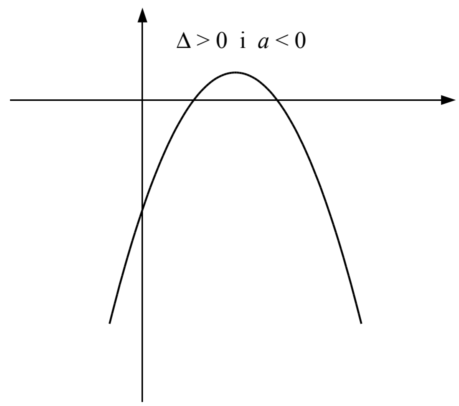
Rys. 3.8

- nierówność ma rozwiązanie jednoelementowe



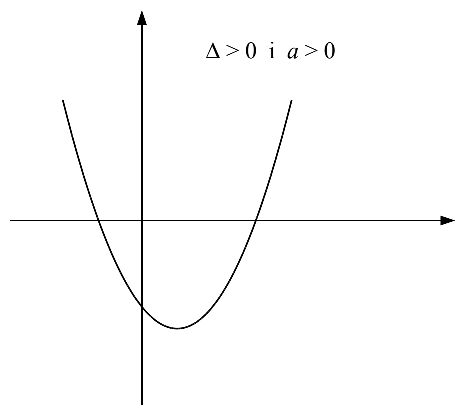
Rys. 3.9

- rozwiązaniem jest zbiór postaci $\langle x_1; x_2\rangle$



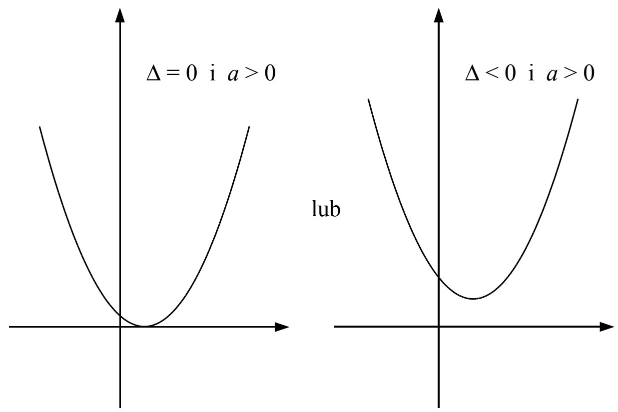
Rys. 3.10

- rozwiązaniem jest zbiór postaci $(-\infty; x_1\rangle \cup \langle x_2; \infty)$



Rys. 3.11

- rozwiązaniem nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych



Rys. 3.12

Podobnie można opisać rozwiązania pozostałych nierówności kwadratowych.

Przykład 3.28 *Rozwiążemy nierówność*

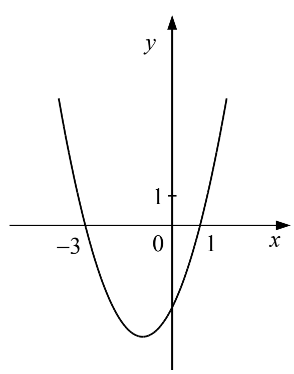
$$(3x-1)^2 > 4\,(2-x)^2$$

$$9x^2 - 6x + 1 > 16 - 16x + 4x^2$$

$$5x^2 + 10x - 15 > 0 \;\; | \cdot \frac{1}{5}$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0.$$

Rozwiązujemy równanie $x^2+2x-3=0$*. Pierwiastkami tego równania są* $x=-3$ *lub* $x=1$*. Wykres funkcji* $y=x^2+2x-3$ *ma postać*



Rys. 3.13

Z wykresu odczytujemy rozwiązanie $x \in (-\infty;-3) \cup (1;\infty)$.

3.8 Równania i nierówności z parametrem.

Przykład 3.29 *a) Narysujemy wykres funkcji* $y = f(m)$ *gdzie* $f(m)$ *jest liczbą pierwiastków równania*

$$mx^2 - (m+2)x + 2 = 0.$$

Zauważmy, że dla $m = 0$ *dane równanie jest równaniem liniowym postaci*

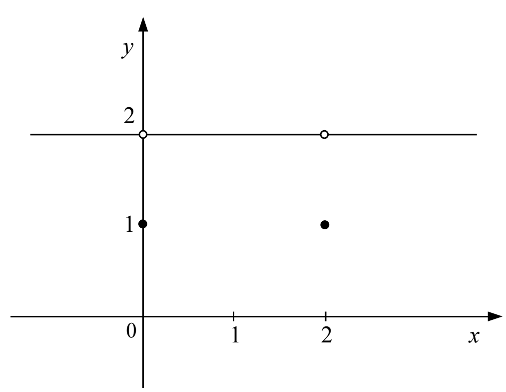
$$-2x + 2 = 0.$$

Ponieważ współczynnik przy x *jest niezerowy, więc równanie to ma jeden pierwiastek.*

Dla $m \neq 0$ *otrzymujemy równanie kwadratowe, w którym ilość pierwiastków zależy od znaku wyróżnika trójmianu stojącego po lewej stronie równania. Obliczmy wyróżnik* $\Delta = (m+2)^2 - 8m = (m-2)^2$*. Widać więc natychmiast, że wyróżnik nie może być ujemny, czyli funkcja* f *nie przyjmuje wartości* 0*. Dalej mamy* $\Delta = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $m = 2$*, czyli dla* $m = 2$ *funkcja* f *przyjmuje wartość* 1*. Wreszcie* $\Delta > 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $(m-2)^2 > 0$*, czyli gdy* $m \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$*. Uwzględniając zastrzeżenie* $m \neq 0$ *mamy, że funkcja* f *przyjmuje wartość* 2 *dla* $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$*. Ostatecznie*

$$f(m) = \begin{cases} 1 & dla\ m \in \{0, 2\} \\ 2 & dla\ m \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty) \end{cases}$$

i wykres jest następujący



Rys. 3.14

b) Sprawdzimy dla jakich wartości parametru m *równanie*

$$(m+1)x^2 - 4mx + m + 1 = 0 \tag{3.6}$$

ma dwa różne pierwiastki dodatnie. Ponieważ równanie liniowe nie może mieć dwóch różnych pierwiastków, więc musimy zastrzec, że $m + 1 \neq 0$*, czyli* $m \neq -1$*.*

Aby równanie kwadratowe miało dwa różne pierwiastki, żądamy, by wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie był dodatni, czyli

$$(4m)^2 - 4(m+1)^2 > 0$$

$$12m^2 - 8m - 4 > 0 \mid \cdot \frac{1}{4}$$

$$3m^2 - 2m - 1 > 0.$$

Pierwiastkami trójmianu z lewej strony powyższej nierówności są $m = -\frac{1}{3}$ *lub* $m = 1$ *i rozwiązaniem tej nierówności jest:* $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; \infty)$. *Jeżeli przez* x_1, x_2 *oznaczymy pierwiastki równania (3.6), to na to, aby pierwiastki te były równocześnie dodatnie, musimy zażądać, aby*

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \quad \wedge \quad x_1 + x_2 > 0.$$

Wykorzystując wzory Viete'a (2.24) i (2.25) mamy $x_1 \cdot x_2 = \frac{m+1}{m+1} = 1$ *oraz* $x_1 + x_2 = \frac{4m}{m+1}$. *Stąd* $x_1 \cdot x_2$ *jest dodatnie dla każdego* m *i do rozwiązania pozostaje nierówność*

$$\frac{4m}{m+1} > 0 \mid \cdot (m+1)^2$$

$$4m(m+1) > 0$$

$$m \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty).$$

Uwzględniając wszystkie warunki otrzymujemy odpowiedź: Równanie $(m+1)x^2 - 4mx + m + 1 = 0$ *posiada dwa różne pierwiastki dodatnie dla* $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

c) Sprawdzimy dla jakich wartości parametru m *nierówność*

$$(m-4)x^2 + (2m-3)x + m - 4 > 0$$

jest spełniona dla wszystkich x *rzeczywistych.*

Jeśli $m = 4$, *to nierówność jest liniowa i ma postać*

$$5x > 0,$$

więc nie jest spełniona dla wszystkich x *rzeczywistych.*

Załóżmy więc, że $m \neq 4$. *Wtedy mamy do czynienia z nierównością kwadratową, która będzie spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy współczynnik przy* x^2 *będzie dodatni i wyróżnik będzie ujemny. Mamy więc warunki*

$$m - 4 > 0 \quad \wedge \quad (2m-3)^2 - 4(m-4)^2 < 0.$$

Z pierwszego warunku mamy

$$m > 4, \tag{3.7}$$

zaś drugi jest równoważny nierówności

$$20m - 55 < 0,$$

skąd

$$m < \frac{11}{4}. \tag{3.8}$$

Część wspólna przedziałów opisanych nierównościami (3.7) i (3.8) jest pusta. Zatem dla żadnego m dana nierówność nie jest tożsamościowa.

3.9 Równania wielomianowe

Definicja 3.30 *Równaniem wielomianowym stopnia n nazywamy równanie postaci*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

gdzie $a_n \neq 0$.

Pierwiastkiem takiego równania jest oczywiście każdy pierwiastek wielomianu stojącego po lewej stronie.

Przedstawimy pewne sposoby rozwiązywania niektórych równań wyższych stopni.

3.9.1 Pomocnicza niewiadoma

Przykład 3.31 *Rozwiążemy równanie*

$$x^8 - 40x^4 + 144 = 0.$$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = x^4 \geqslant 0$. Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t

$$t^2 - 40t + 144 = 0.$$

Wyróżnik wynosi $\Delta = 1600 - 576 = 1024$, czyli $\sqrt{\Delta} = 32$ i stąd

$$t = 4 \quad \vee \quad t = 36.$$

Wobec tego

$$x^4 = 4 \quad \vee \quad x^4 = 36$$

$$\left(x^2 - 2\right)\left(x^2 + 2\right) = 0 \;\vee\; \left(x^2 - 6\right)\left(x^2 + 6\right) = 0$$

i w konsekwencji

$$x = \sqrt{2} \;\vee\; x = -\sqrt{2} \;\vee\; x = \sqrt{6} \;\vee\; x = -\sqrt{6}.$$

Rozwiązaniem równania jest zbiór $\left\{-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\right\}$.

3.9.2 Rozkład na czynniki

Przykład 3.32 *a) Rozwiążemy równanie*

$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0. \tag{3.9}$$

Widoczne są po lewej stronie pewne proporcje pomiędzy współczynnikami wielomianu. Rozkładamy go więc na czynniki grupując wyrazy

$$2\left(x^3 - 1\right) - 3\left(x^2 - x\right) = 0$$

$$2(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) - 3x(x-1) = 0$$

$$(x-1)\left[2\left(x^2 + x + 1\right) - 3x\right] = 0$$

$$(x-1)\left(2x^2 - x + 2\right) = 0$$

$$x = 1 \ \vee \ 2x^2 - x + 2 = 0.$$

Zauważmy, że wyróżnik trójmianu z drugiego równania jest ujemny. Zatem drugie równanie nie ma pierwiastków. W konsekwencji jedynym pierwiastkiem równania (3.9) jest $x = 1$.

b) Rozwiążemy równanie

$$x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 12x + 40 = 0.$$

Ponieważ nie widać możliwości rozłożenia na czynniki lewej strony za pomocą grupowania wyrazów, więc spróbujemy skorzystać z Wniosku 2.37. Zgodnie z tym wnioskiem jedynymi pierwiastkami wymiernymi tego równania mogą być dzielniki wyrazu wolnego, czyli liczby ze zbioru

$$p_{40} = \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm8, \pm10, \pm20, \pm40\}.$$

Jeżeli wielomian stojący po lewej stronie oznaczymy przez W, to mamy

$$W(1) = 1 + 3 - 14 - 12 + 40 = 18 \neq 0,$$
$$W(-1) = 1 - 3 - 14 + 12 + 40 = 36 \neq 0,$$
$$W(2) = 16 + 24 - 56 - 24 + 40 = 0.$$

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu W, więc wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x - 2$. Wykonując dzielenie dostajemy

$$x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 12x + 40 = (x-2)\left(x^3 + 5x^2 - 4x - 20\right).$$

Rozłożymy teraz wielomian $\widetilde{W}(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ grupując wyrazy:

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(x) &= x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = \left(x^3 - 4x\right) + \left(5x^2 - 20\right) \\ &= x\left(x^2 - 4\right) + 5\left(x^2 - 4\right) = \left(x^2 - 4\right)(x+5) \\ &= (x-2)(x+2)(x+5).\end{aligned}$$

Ostatecznie nasze równanie zapisuje się w postaci

$$(x-2)^2(x+2)(x+5)=0,$$

skąd

$$x-2=0 \ \vee \ x+2=0 \ \vee \ x+5=0,$$

czyli równoważnie

$$x=2 \ \vee \ x=-2 \ \vee \ x=-5.$$

Rozwiązaniem równania jest zbiór $\{-5,-2,2\}$.

3.10 Nierówności wielomianowe

Definicja 3.33 *Nierównością wielomianową nazywamy nierówność jednej z postaci*

$$W(x)>0,\ W(x)<0,\ W(x)\geqslant 0,\ W(x)\leqslant 0,$$

gdzie W *jest wielomianem.*

Aby rozwiązać nierówność wielomianową należy rozłożyć jej lewą stronę na czynniki liniowe lub czynniki kwadratowe o ujemnym wyróżniku.

Przedstawimy pewne sposoby rozwiązywania niektórych nierówności wyższych stopni.

3.10.1 Metoda siatki znaków

Metoda ta polega na wpisaniu do tabeli wszystkich pierwiastków wielomianu oraz przedziałów, na jakie podzieliły oś liczbową te pierwiastki. W odpowiednich rubrykach tabeli zapisujemy znaki poszczególnych czynników w rozpatrywanych przedziałach.

Przykład 3.34 *Rozwiążemy nierówność*

$$(x-2)(x-1)(x+2)(x+1)<0$$

metodą siatki znaków. Rysujemy tabelę i uzupełniamy ją następująco: w pierwszej kolumnie począwszy od drugiej pozycji wpisujemy czynniki wielomianu: $x+2$, $x+1$, $x-1$, $x-2$, *a na ostatniej pozycji w tej kolumnie piszemy* $W(x)$. *W pierwszym wierszu począwszy od drugiej pozycji wpisujemy przedziały na jakie została podzielona oś liczbowa przez pierwiastki wielomianu* W *oraz te pierwiastki. Wpisujemy odpowiednie znaki poszczególnych czynników w odpowiednich przedziałach. W ostatnim wierszu zapisujemy znak wielomianu* W *w odpowiednich przedziałach, mnożąc przez siebie znaki stojące powyżej. Z ostatniego wier-*

sza odczytujemy rozwiązanie nierówności w zależności od zwrotu tej nierówności.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; \infty)$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$W(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Drugi wiersz: $x+2$ *jest ujemne dla* $x < -2$*, równe zeru dla* $x = -2$ *i większe od zera dla wszystkich pozostałych wartości; trzeci wiersz:* $x+1$ *jest ujemne dla* $x < -1$*, równe zeru dla* $x = -1$ *i większe od zera dla wszystkich pozostałych wartości; itd.*

Z ostatniego wiersza odczytujemy wszystkie przedziały oznaczone znakiem $(-)$*, gdyż do rozwiązania jest nierówność* $W(x) < 0$*. Rozwiązaniem nierówności jest zbiór* $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

3.10.2 Metoda graficzna

Polega na naszkicowaniu przybliżonego wykresu wielomianu i odczytaniu z niego odpowiednich przedziałów. Aby naszkicować wykres, rozkładamy wielomian W na czynniki liniowe i kwadratowe o ujemnym wyróżniku. Ponieważ trójmiany o ujemnym wyróżniku mają stały znak, więc możemy przez te czynniki nierówność podzielić stronami. W ten sposób uzyskujemy nierówność z lewą stroną będącą iloczynem czynników liniowych.

Teraz wykres lewej strony szkicujemy, posługując się następującymi zasadami:

1) Zaznaczamy na osi Ox miejsca zerowe wielomianu W.

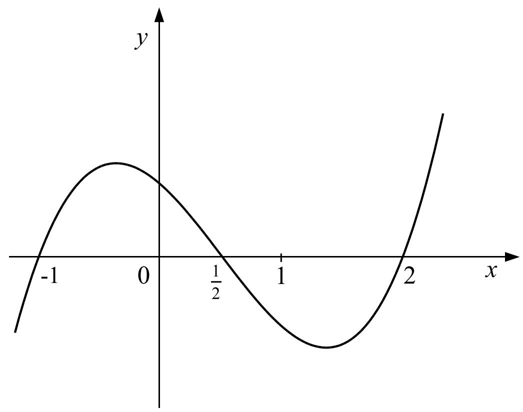
2) Zaczynamy rysować wykres od prawej strony.

3) Jeżeli po wymnożeniu wszystkich czynników współczynnik przy najwyższej potędze niewiadomej jest dodatni, to zaczynamy rysować wykres od prawej strony z góry.

4) Jeżeli po wymnożeniu wszystkich czynników współczynnik przy najwyższej potędze niewiadomej jest ujemny, to zaczynamy rysować wykres od prawej strony z dołu.

5) Jeżeli liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu o krotności parzystej, to wykres nie przecina osi Ox w x_0 ("odbija się od osi").

6) Jeżeli liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu o krotności nieparzystej, to wykres przecina oś Ox w x_0.



Rys. 3.15

Przykład 3.35 *a) Rozwiążemy nierówność*

$$(x+1)(x-2)(2x-1)>0$$

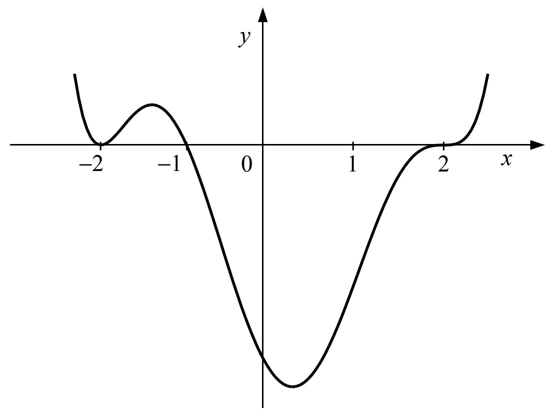
metodą graficzną.

Rysujemy wykres funkcji $W(x)=(x+1)(x-2)(2x-1)$ *(Rys. 3.15). Rysowanie zaczynamy od prawej strony z góry, ponieważ współczynnik przy x w najwyższej potędze jest dodatni. Krotności wszystkich trzech pierwiastków wynoszą jeden, są nieparzyste, więc we wszystkich pierwiastkach wykres przecina oś* Ox*. Z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności* $x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)\cup(2;\infty)$.

b) Rozwiążemy nierówność

$$(x+2)^2(x-2)^3(x+1)\leqslant 0$$

metodą graficzną. Rysujemy wykres lewej strony zaczynając od prawej strony z góry, ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze x jest dodatni. Przy rysowaniu trzeba pamiętać, że liczba -2 *jest pierwiastkiem dwukrotnym lewej strony, więc wykres "odbije się" w tym punkcie od osi. Oto wykres wielomianu* $W(x)=(x+2)^2(x-2)^3(x+1)$



Rys. 3.16

Funkcja W przyjmuje wartości niedodatnie dla $x \in \langle -1; 2\rangle \cup \{-2\}$ *i ten zbiór jest rozwiązaniem naszej nierówności.*

c) Rozwiążemy nierówność

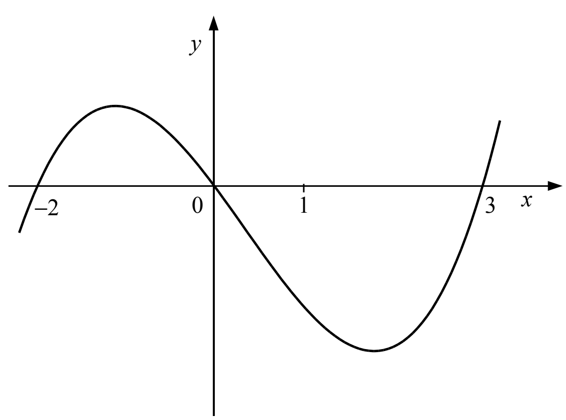
$$x^3 - x^2 - 6x < 0$$

metodą graficzną.

Przed rysowaniem wykresu rozkładamy lewą stronę nierówności na czynniki

$$x^3 - x^2 - 6x = x\left(x^2 - x - 6\right) = x\,(x-3)\,(x+2)\,.$$

Wykres zaczniemy rysować od prawej strony z góry, ponieważ współczynnik przy x *w najwyższej potędze jest większy od zera.*



Rys. 3.17

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $(-\infty; -2) \cup (0; 3)$.

d) Rozwiążemy nierówność

$$-x^6 - x^4 + 2x^2 \leqslant 0$$

metodą graficzną.

Rozkładamy lewą stronę na czynniki.

$$-x^6 - x^4 + 2x^2 = -x^2\left(x^4 + x^2 - 2\right).$$

Wyznaczamy pierwiastki wielomianu z drugiego nawiasu

$$x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Podstawiamy $t = x^2 \geqslant 0$. *Otrzymujemy równanie*

$$t^2 + t - 2 = 0. \tag{3.10}$$

Stąd

$$t = -2 \quad \vee \quad t = 1.$$

Zatem lewa strona równania (3.10) rozkłada się na czynniki w następujący sposób

$$t^2 + t - 2 = (t+2)(t-1).$$

W konsekwencji

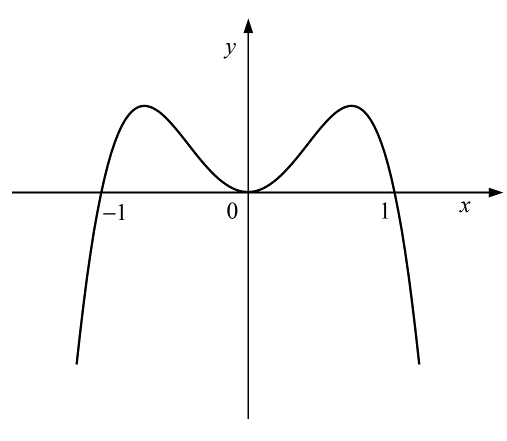
$$x^4 + x^2 - 2 = \left(x^2 + 2\right)\left(x^2 - 1\right) = \left(x^2 + 2\right)(x-1)(x+1).$$

Zatem nasza nierówność przyjmie postać

$$-x^2\left(x^2 + 2\right)(x-1)(x+1) \leqslant 0.$$

Ponieważ wyrażenie x^2+2 *przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie, więc możemy nierówność podzielić stronami przez to wyrażenie*

$$-x^2(x-1)(x+1) \leqslant 0.$$



Rys. 3.18

Wykres (Rys.3.18) zaczniemy rysować od prawej strony z dołu, ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze x jest ujemny

Z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1; \infty)$.

3.11 Równania wymierne

Definicja 3.36 *Równanie, które można zapisać w postaci*

$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)} = 0,$$

gdzie W_1, W_2 *są wielomianami, przy czym* W_2 *nie jest wielomianem zerowym, nazywamy równaniem wymiernym. Dziedziną* D *równania wymiernego jest zbiór tych* x*, dla których* $W_2(x) \neq 0$*, czyli* $D = \{x \in \mathbb{R} : W_2(x) \neq 0\}$.

Równania wymierne rozwiązujemy według następującego schematu:

1) Określamy dziedzinę równania.

2) Mnożymy obie strony równania przez wyrażenie, które pozwoli zlikwidować mianownik i sprowadzi równanie wymierne do pewnego równania wielomianowego $W(x) = 0$.

3) Rozwiązujemy poznanymi wcześniej metodami równanie wielomianowe $W(x) = 0$.

4) Uwzględniając dziedzinę równania wymiernego i rozwiązanie równania $W(x) = 0$, znajdujemy rozwiązanie równania wymiernego.

Przykład 3.37 *a) Rozwiążemy równanie*

$$\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-1} = 1.$$

Dziedziną równania jest $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. *Mnożymy stronami przez* $(x+2)(x-1)$

$$(x-1) - 2(x+2) = (x+2)(x-1)$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe. Ponieważ wyróżnik $\Delta = 4 - 12 = -8$ *jest ujemny, więc równanie kwadratowe nie ma pierwiastków. Stąd dane równanie wymierne nie ma pierwiastków. Rozwiązaniem jest zbiór pusty.*

b) Rozwiążemy równanie

$$\frac{3}{x^3+8} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{2}{x^2-2x+4}.$$

Określamy dziedzinę równania

$$x^3 + 8 \neq 0 \ \wedge \ x^2 - 4 \neq 0 \ \wedge \ x^2 - 2x + 4 \neq 0.$$

Rozwiązaniami tych zastrzeżeń są odpowiednio

$$x \neq -2 \ \wedge \ (x \neq -2 \wedge x \neq 2) \ \wedge \ x \in \mathbb{R}.$$

Stąd dziedziną jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Ponieważ $x^3 + 8 = (x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right)$, *więc wystarczy dane równanie wymierne pomnożyć stronami przez wyrażenie* $(x-2)(x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right)$

$$3(x-2) - \left(x^2 - 2x + 4\right) = 2(x-2)(x+2)$$

$$3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania kwadratowego są liczby $x = \frac{2}{3}$ *lub* $x = 1$. *Ponieważ oba leżą w zbiorze* D, *więc rozwiązaniem danego równania wymiernego jest zbiór* $\left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$.

c) Rozwiążemy równanie

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}|x-2| + 2.$$

Dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. *Ze względu na występującą w równaniu wartość bezwzględną, rozważamy dwa przypadki:*

1) $x \in (-\infty; 2)$. *Wtedy równanie przyjmuje postać*

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}(-x+2) + 2$$

$$\frac{x}{x-1} = -\frac{x}{2} + 3.$$

Mnożąc stronami przez $2(x-1)$, *dostajemy równanie*

$$2x = -x(x-1) + 6(x-1)$$

$$-x^2 + 5x - 6 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania kwadratowego są liczby $x = 2$ *lub* $x = 3$. *Żaden z tych pierwiastków nie leży w przedziale* $(-\infty; 2)$, *więc w tym przypadku rozwiązaniem jest zbiór pusty.*

2) $x \in \langle 2; \infty)$. *Wtedy rozważane równanie ma postać*

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}(x-2) + 2.$$

Po pomnożeniu stronami przez $2(x-1)$ *i wykonaniu przekształceń mamy*

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby $x = 1$ *lub* $x = 2$. *Tylko drugi pierwiastek należy do przedziału* $\langle 2; \infty)$, *więc rozwiązaniem w tym przypadku jest zbiór jednoelementowy* $\{2\}$.

Reasumując, rozwiązaniem danego równania wymiernego jest zbiór $\{2\}$.

3.11.1 Równania wymierne z parametrem

Przykład 3.38 *Znajdziemy rozwiązanie równania*

$$\frac{x-1}{x+a} = 3$$

w zależności od parametru a. Dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-a\}$. Mnożymy obie strony równania przez $(x+a)$

$$-2x = 3a + 1.$$

Z tego równania

$$x = \frac{-3a-1}{2}.$$

Uwzględniamy dziedzinę

$$\frac{-3a-1}{2} \neq -a.$$

Stąd $a \neq -1$. Zatem dla $a \neq -1$ rozwiązaniem równania jest zbiór jednoelementowy $\left\{\frac{-3a-1}{2}\right\}$.

Pozostaje sprawdzić co się dzieje, gdy $a = -1$. W tym celu podstawmy to a do równania wyjściowego

$$\frac{x-1}{x-1} = 3,$$

czyli

$$1 = 3.$$

Jest to równanie sprzeczne.

3.12 Nierówności wymierne

Definicja 3.39 *Nierównością wymierną nazywamy nierówność postaci*

$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)} < 0 \text{ lub } \frac{W_1(x)}{W_2(x)} \leqslant 0 \text{ lub } \frac{W_1(x)}{W_2(x)} > 0 \text{ lub } \frac{W_1(x)}{W_2(x)} \geqslant 0,$$

gdzie W_1, W_2 są wielomianami, przy czym W_2 nie jest wielomianem zerowym. Dziedziną nierówności wymiernej którejkolwiek z powyższych postaci jest zbiór $D = \{x \in \mathbb{R} : W_2(x) \neq 0\}$.

Nierówność wymierną rozwiązujemy doprowadzając ją do postaci wielomianowej. Mianowicie, przy założeniach dotyczących dziedziny nierówności, prawdziwe są następujące równoważności

$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)} > 0 \iff W_1(x) \cdot W_2(x) > 0,$$
$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)} < 0 \iff W_1(x) \cdot W_2(x) < 0,$$
$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)} \geqslant 0 \iff W_1(x) \cdot W_2(x) \geqslant 0,$$
$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)} \leqslant 0 \iff W_1(x) \cdot W_2(x) \leqslant 0.$$

Rozwiązywanie nierówności wymiernych zilustrujemy przykładami.

Przykład 3.40 *a) Rozwiążemy nierówność*

$$\frac{3x-2}{x-3} > 0.$$

Dziedziną jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. *Nierówność ta jest równoważna koniunkcji*

$$(3x-2)(x-3) > 0 \quad \wedge \quad x \neq 3.$$

Rozwiązaniem powyższej nierówności kwadratowej jest zbiór $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (3; \infty)$. *Ponieważ* 3 *nie jest elementem tego zbioru, więc rozwiązaniem danej nierówności wymiernej jest ten sam zbiór.*

b) Rozwiążemy nierówność

$$\frac{7x-4}{x+2} \geqslant 1.$$

Dziedziną nierówności jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. *Odejmując od obu stron* 1 *i sprowadzając lewą stronę do wspólnego mianownika dostajemy*

$$\frac{6x-6}{x+2} \geqslant 0.$$

Przy założeniu $x \neq -2$ *nierówność ta jest równoważna nierówności*

$$6(x-1)(x+2) \geqslant 0.$$

Rozwiązaniem tej nierówności kwadratowej jest zbiór $(-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty)$. *Uwzględniając jednak warunek* $x \neq -2$, *otrzymujemy rozwiązanie danej nierówności wymiernej*

$$x \in (-\infty; -2) \cup \langle 1; \infty).$$

c) Rozwiążemy nierówność

$$\frac{x-2}{x-3} - \frac{2}{x-1} - \frac{8}{x^2-4x+3} < 0. \tag{3.11}$$

Rozkładamy trójmian kwadratowy $x^2 - 4x + 3$ *na czynniki*

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

Stąd nasza nierówność przyjmuje postać

$$\frac{x-2}{x-3} - \frac{2}{x-1} - \frac{8}{(x-1)(x-3)} < 0$$

i po sprowadzeniu do wspólnego mianownika mamy

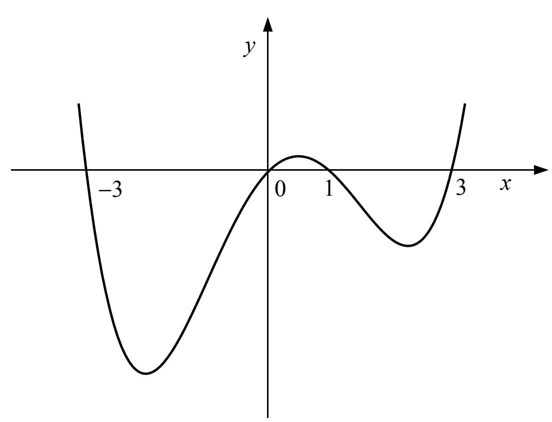
$$\frac{(x-2)(x-1) - 2(x-3) - 8}{(x-1)(x-3)} < 0$$

$$\frac{x^2+3x}{(x-1)(x-3)} < 0$$

Dziedziną naszej nierówności jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. *Dla* $x \in D$ *nasza nierówność wymierna jest więc równoważna nierówności*

$$x(x+3)(x-1)(x-3) < 0.$$

Szkicujemy wykres wielomianu stojącego po lewej stronie



Rys. 3.19

Z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności wielomianowej

$$x \in (-3; 0) \cup (1; 3).$$

Uwzględniając dziedzinę, która w tym przypadku nie ma wpływu na rozwiązanie, mamy, że rozwiązaniem nierówności (3.11) jest zbiór $(-3; 0) \cup (1; 3)$.

3.13 Równania trygonometryczne

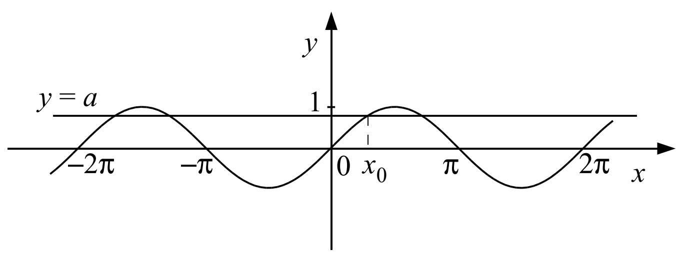
Definicja 3.41 *Równanie, w którym niewiadoma występuje wyłącznie jako argument funkcji trygonometrycznej, nazywamy równaniem trygonometrycznym.*

Ogólnej metody rozwiązywania takich równań nie ma. Są jednak pewne typy równań, dla których można podać metodę rozwiązywania.

Typ podstawowy: są to równania postaci $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ oraz $\operatorname{ctg} x = a$. W celu rozwiązania takiego równania wystarczy wyznaczyć pewną wartość argumentu $x = x_0$ spełniającą dane równanie i korzystając z wykresu odpowiedniej funkcji trygonometrycznej, uwzględniając okresowość tej funkcji, można odczytać wszystkie rozwiązania równania podstawowego typu.

Rozpatrzmy poszczególne przypadki:

I. $\sin x = a$, $x \in \mathbb{R}$ i $|a| \leqslant 1$ (oczywiście dla $|a| > 1$ równanie jest sprzeczne, co wynika z ograniczoności funkcji sinus). Wyznaczamy $x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ spełniające to równanie. W tym celu albo posługujemy się tablicami, albo wybieramy jedną z liczb ze zbioru $\left\{0, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}\right\}$, dla których wartości sinusa są nam znane. Szkicujemy wykresy funkcji danych wzorami $y = \sin x$ oraz $y = a$.



Rys. 3.20

Z rysunku tego odczytujemy, że pierwiastkami równania $\sin x = a$ są wszystkie liczby postaci

$$x = x_0 + 2k\pi \text{ lub } x = \pi - x_0 + 2k\pi, \tag{3.12}$$

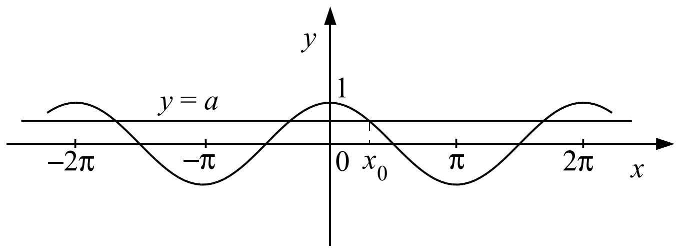
gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

W szczególnych przypadkach dostajemy:

1) Dla $a = 0$ w równaniu $\sin x = 0$ z dwóch powyżej opisanych serii pierwiastków powstaje jedna $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Dla $a = 1$ w równaniu $\sin x = 1$ obie opisane powyżej serie rozwiązań pokrywają się i otrzymujemy rozwiązanie $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) Dla $a = -1$ w równaniu $\sin x = -1$ podobnie jak wyżej otrzymujemy rozwiązanie $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Rys. 3.21

II. $\cos x = a$, $x \in \mathbb{R}$ i $|a| \leqslant 1$. W przedziale $\langle 0;\pi\rangle$ znajdujemy x_0 spełniające równanie $\cos x = a$. Następnie szkicujemy wykresy funkcji $y = \cos x$ oraz $y = a$ (Rys. 3.21) i odczytujemy pozostałe pierwiastki z tego rysunku.Pierwiastkami równania $\cos x = a$ są wszystkie liczby postaci

$$x = x_0 + 2k\pi \text{ lub } x = -x_0 + 2k\pi, \tag{3.13}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

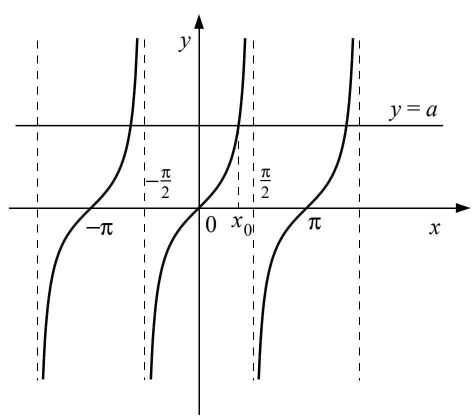
Podobnie, jak w przypadku sinusa otrzymujemy szczególne przypadki:

1) Dla $a = 0$ pierwiastkami równania $\cos x = 0$ są wszystkie liczby postaci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Dla $a = 1$ pierwiastkami równania $\cos x = 1$ są wszystkie liczby postaci $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) Dla $a = -1$ pierwiastkami równania $\cos x = -1$ są wszystkie liczby postaci $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

III. $\operatorname{tg} x = a$, $x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ oraz $a \in \mathbb{R}$. W przedziale $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ znajdujemy x_0 spełniające nasze równanie. Szkicujemy wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$ i $y = a$ i z rysunku odczytujemy pozostałe pierwiastki równania $\operatorname{tg} x = a$.



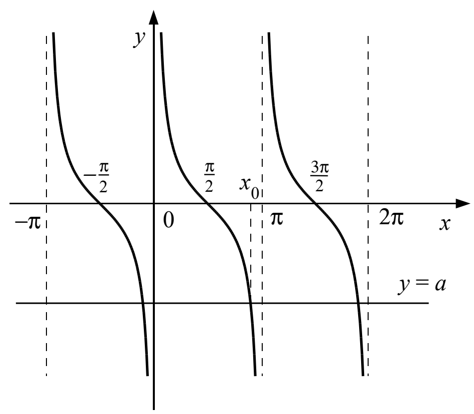
Rys. 3.22

Pierwiastkami równania $\operatorname{tg} x = a$ są wszystkie liczby postaci

$$x = x_0 + k\pi, \tag{3.14}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

IV. $\operatorname{ctg} x = a$, $x \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ oraz $a \in \mathbb{R}$. W przedziale $(0; \pi)$ znajdujemy x_0 spełniające nasze równanie. Szkicujemy wykresy funkcji $y = \operatorname{ctg} x$, $y = a$ i z rysunku odczytujemy pozostałe pierwiastki równania $\operatorname{ctg} x = a$.



Rys. 3.23

Pierwiastkami równania $\operatorname{ctg} x = a$ są wszystkie liczby postaci

$$x = x_0 + k\pi, \tag{3.15}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Uwaga 3.42 *Warto zauważyć, że jeśli przez f oznaczymy którąkolwiek z funkcji trygonometrycznych, to we wszystkich przypadkach sprowadzaliśmy równanie do postaci $f(x) = f(x_0)$, gdzie x było niewiadomą, zaś x_0 daną liczbą. Okazuje się, że nawet jeśli x_0 nie jest stałą, a zależy od x, to i tak wolno nam zastosować otrzymane powyżej wzory na pierwiastki. Tak więc np. równanie $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(3x - \pi)$ jest równoważne analogicznej do (3.12) alternatywie:*

$$x + \frac{\pi}{2} = 3x - \pi + 2k\pi \text{ lub } x + \frac{\pi}{2} = \pi - (3x - \pi) + 2k\pi,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3.43 *a) Rozwiążemy równanie*

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

Wiadomo, że $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$. *Zatem na mocy (3.13) pieriastkami naszego równania są wszystkie liczby postaci*

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

b) Rozwiążemy równanie

$$\operatorname{ctg}(x+1) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Dziedziną tego równania jest zbiór tych liczb rzeczywistych x, *dla których* $x+1 \neq m\pi$, *czyli* $x \neq m\pi - 1$, *gdzie* $m \in \mathbb{Z}$. *Wiadomo, że* $\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$. *Zatem na mocy (3.15) otrzymujemy*

$$x + 1 = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

a stąd

$$x = \frac{\pi}{3} - 1 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Rozwiążemy równanie

$$\sin\left(x^2\right) = 1.$$

Korzystając ze szczególnego przypadku równania $\sin x = a$ *otrzymujemy*

$$x^2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Zauważmy, że dla $k < 0$ *równanie to jest sprzeczne, bo lewa strona jest nieujemna. Zatem wystarczy brać* k *ze zbioru* $\mathbb{N} \cup \{0\}$. *Ostatecznie*

$$x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad \vee \quad x = -\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi},$$

gdzie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

d) Rozwiążemy równanie

$$\operatorname{tg}(x-1) = \operatorname{tg} 2x.$$

Dziedziną tego równania jest zbiór tych x, *dla których*

$$x - 1 \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \wedge \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \text{ gdzie } m \in \mathbb{Z},$$

czyli

$$x \neq 1 + \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \wedge \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}, \text{ gdzie } m \in \mathbb{Z}.$$

Z (3.14) mamy

$$x - 1 = 2x + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

i ostatecznie

$$x = -1 - k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Wiele równań trygonometrycznych możemy sprowadzić do równań innego typu (nietrygonometrycznych) lub do trygonometrycznych równań podstawowych, stosując

a) podstawienie, gdy występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna tego samego argumentu,

b) dostępne wzory trygonometryczne, pozwalające sprowadzić równanie do podstawowego lub do równania zawierającego tylko jedną funkcję trygonometryczną tego samego argumentu.

Poniższe przykłady zilustrują podane metody.

Przykład 3.44 *a) Rozwiążemy równanie*

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x + 2} = 1.$$

Zauważmy, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R}$*, gdyż dla każdego* $x \in \mathbb{R}$ *zachodzi* $\sin x \neq -2$*. Ponieważ występuje tylko funkcja sinus od argumentu* x*, więc stosujemy podstawienie* $t = \sin x \in \langle -1; 1 \rangle$*. Otrzymujemy równanie wymierne postaci*

$$\frac{t^2}{t+2} = 1,$$

a stąd

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Otrzymane równanie kwadratowe ma pierwiastki $t = -1$ *lub* $t = 2 \notin \langle -1; 1 \rangle$*. Dane równanie trygonometryczne jest więc równoważne równaniu podstawowemu*

$$\sin x = -1.$$

Stąd

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \textit{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Rozwiążemy równanie

$$\cos 3x = \sin 2x.$$

Zauważmy, że na mocy wzorów redukcyjnych równanie to daje się zapisać w postaci

$$\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$$

Stąd

$$3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$*. W konsekwencji*

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Ostatecznie pierwiastkami danego równania są wszystkie liczby postaci

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

c) Rozwiążemy równanie

$$\cos 2x + 2\cos x = \frac{1}{2}.$$

Skorzystamy najpierw z wzoru na kosinus kąta podwojonego (2.13)

$$2\cos^2 x - 1 + 2\cos x - \frac{1}{2} = 0$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x - \frac{3}{2} = 0.$$

Podstawiając $t = \cos x \in \langle -1; 1\rangle$ *otrzymujemy równanie kwadratowe*

$$2t^2 + 2t - \frac{3}{2} = 0.$$

Pierwiastkami tego równania kwadratowego są

$$t = -\frac{3}{2} \notin \langle -1; 1\rangle \quad \vee \quad t = \frac{1}{2}.$$

Zatem otrzymujemy równanie podstawowe

$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

Na mocy (3.13) dostajemy rozwiązanie danego równania

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

d) Rozwiążemy równanie

$$\sin 2x - \sin 4x = \cos 2x + \cos 4x.$$

Stosujemy wzór na różnicę sinusów i sumę kosinusów ((2.17), (2.18))

$$2\cos 3x \cdot \sin(-x) = 2\cos 3x \cdot \cos(-x) \quad | : 2$$

$$-\cos 3x \cdot \sin x = \cos 3x \cdot \cos x$$

$$\cos 3x (\sin x + \cos x) = 0.$$

Stąd

$$\cos 3x = 0 \quad \vee \quad \sin x + \cos x = 0.$$

Z pierwszego z tych równań mamy $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, *czyli* $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, *gdzie* $k \in \mathbb{Z}$. *Z drugiego równania mamy*

$$\cos x = -\sin x,$$

a stąd na mocy wzorów redukcyjnych

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi.$$

Pierwsze z tych równań jest sprzeczne, zaś z drugiego mamy $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, *a stąd ostatecznie*

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

W konsekwencji pierwiastkami danego równania trygonometrycznego są wszystkie liczby postaci

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

e) Rozwiążemy równanie

$$2\cos 2x - 4\sin 3x \cdot \sin x = -1.$$

Zauważmy, że z wzoru na różnicę kosinusów (2.19) wynika, że

$$2\sin 3x \cdot \sin x = \cos 2x - \cos 4x.$$

Zatem nasze równanie jest równoważne równaniu

$$2\cos 2x - 2(\cos 2x - \cos 4x) = -1,$$

skąd otrzymujemy

$$\cos 4x = -\frac{1}{2}.$$

Na mocy (3.13) dostajemy

$$4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 4x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

czyli

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Na zakończenie omówimy sposoby rozwiązywania równań postaci $a\sin x + b\cos x = c$, gdzie $ab \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Sposób I

Dla $c = 0$ mamy równanie postaci

$$a\sin x + b\cos x = 0.$$

Zauważmy, że gdyby $\cos x = 0$, to $\sin x \neq 0$ i równanie byłoby sprzeczne. Możemy więc założyć, że $\cos x \neq 0$. Dzieląc stronami przez $a \cos x$, dostajemy

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}.$$

Ostatnie równanie jest równaniem podstawowym.

Dla $c \neq 0$ i $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1$ równanie

$$a \sin x + b \cos x = c$$

dzielimy stronami przez $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ponieważ

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

więc wartości

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

możemy potraktować odpowiednio jako $\sin x_0$ i $\cos x_0$ dla pewnego $x_0 \in \langle 0; 2\pi)$ na mocy (2.5). Otrzymujemy równanie

$$\sin x_0 \sin x + \cos x_0 \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Na mocy wzoru na kosinus różnicy (2.11) mamy

$$\cos(x - x_0) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

a to jest równanie podstawowe.

Dla $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1$ równanie jest sprzeczne, co wynika z ograniczoności funkcji kosinus.

Sposób II

Wykorzystując wzory wyrażające sinus i kosinus za pomocą tangensa argumentu połówkowego ((2.14), (2.15)) dostajemy równanie

$$a\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + b\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = c.$$

Podstawiając w tym równaniu $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, otrzymujemy równanie wymierne. Zauważmy jednak, że w tym przypadku musimy zastrzec, że

$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

czyli
$$x \neq \pi + 2k\pi.$$
Gdyby $x = \pi + 2k\pi$, to $\sin x = 0$ i $\cos x = -1$, czyli nasze równanie przyjmuje postać
$$-b = c.$$
Jeżeli więc współczynniki b, c spełniają powyższy warunek, to do otrzymanego rozwiązania musimy dołączyć pierwiastki postaci $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3.45 *Rozwiążemy równanie*
$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$$
Zauważmy, że $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant 1$. *Dzielimy więc równanie stronami przez* $\sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$ *i otrzymujemy*
$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Ponieważ dla $x_0 = \frac{5\pi}{6}$ *mamy* $\sin x_0 = \frac{1}{2}$ *i* $\cos x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, *więc*
$$\sin\frac{5\pi}{6}\sin x + \cos\frac{5\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Zatem
$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
W konsekwencji
$$x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$
Stąd otrzymujemy ostateczne rozwiązanie danego równania
$$x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Rozwiążemy to samo równanie sposobem II. Zauważmy, że $\frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, *więc czyniąc zastrzeżenie* $x \neq \pi + 2k\pi$, *gdzie* $k \in \mathbb{Z}$, *nie gubimy żadnych rozwiązań. Podstawmy* $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ *oraz* $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, *gdzie* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. *Otrzymujemy równanie wymierne*
$$\frac{2t}{1+t^2} - \sqrt{3}\frac{1-t^2}{1+t^2} = \sqrt{2} \mid \cdot \left(1+t^2\right)$$
$$2t - \sqrt{3}\left(1-t^2\right) = \sqrt{2}\left(1+t^2\right)$$
$$t^2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + 2t - \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0.$$

Wyróżnik otrzymanego po lewej stronie trójmianu wynosi

$$\Delta = 4 + 4\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = 8.$$

Stąd pierwiastkami równania kwadratowego są liczby

$$t = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)} = \frac{-1 - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \left(-1 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$$

lub

$$t = \left(-1 + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right).$$

Otrzymujemy więc alternatywę równań podstawowych

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \left(-1 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \;\vee\; \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \left(-1 + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right).$$

Z uwagi na postać prawych stron, szukanie rozwiązań takich równań podstawowych jest skomplikowane. Przykład ten może wskazywać na większą efektywność pierwszej metody.

3.14 Nierówności trygonometryczne

Definicja 3.46 *Nierównością trygonometryczną nazywamy taką nierówność, w której niewiadoma występuje wyłącznie jako argument funkcji trygonometrycznej.*

Podobnie, jak przy równaniach, wyróżniamy nierówności podstawowe i inne. Przykładami podstawowych nierówności trygonometrycznych są: $\sin x > a$, $\cos x \leqslant a$, $a \leqslant \operatorname{tg} x < b$, gdzie a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Podstawowe nierówności trygonometryczne rozwiązujemy w trzech krokach:

1) Szkicujemy wykres odpowiedniej funkcji trygonometrycznej oraz wykresy odpowiednich funkcji stałych ($y = a$).

2) Rozwiązujemy daną nierówność, korzystając z wykresu, w jednym z okresów odpowiedniej funkcji trygonometrycznej.

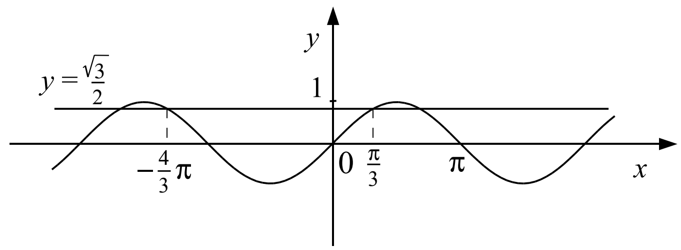
3) Formułujemy ostateczną odpowiedź, uwzględniając okresowość występującej w nierówności funkcji trygonometrycznej.

Oto przykłady rozwiązań podstawowych nierówności trygonometrycznych:

Przykład 3.47 *a) Rozwiążemy nierówność*

$$\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Szkicujemy wykresy funkcji zadanych wzorami $y = \sin x$ oraz $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Rys. 3.24

Z wykresu widać, że rozwiązaniem naszej nierówności w przedziale $\left\langle -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ *jest*

$$x \in \left(-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right).$$

Uwzględniając, że okresem podstawowym sinusa jest 2π *otrzymujemy ostateczne rozwiązanie danej nierówności trygonometrycznej*

$$x \in \left(-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right),$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$*.*

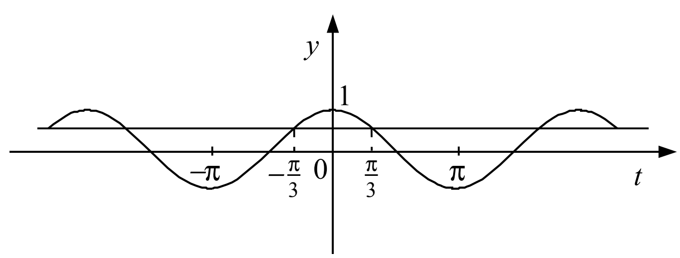
b) Rozwiążemy nierówność

$$\cos 2x \geqslant \frac{1}{2}.$$

Wykonajmy podstawienie $t = 2x$*. Wtedy nasza nierówność przyjmie postać*

$$\cos t \geqslant \frac{1}{2}.$$

Szkicujemy wykresy funkcji $y = \cos t$ *oraz* $y = \frac{1}{2}$



Rys. 3.25

Z wykresu widać, że rozwiązaniem ostatniej nierówności względem t *w przedziale* $\langle -\pi; \pi \rangle$ *jest*

$$t \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\rangle,$$

czyli uwzględniając okresowość funkcji kosinus mamy

$$t \in \left\langle -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Dla x mamy więc nierówność podwójną

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

W konsekwencji rozwiązaniem danej nierówności trygonometrycznej jest

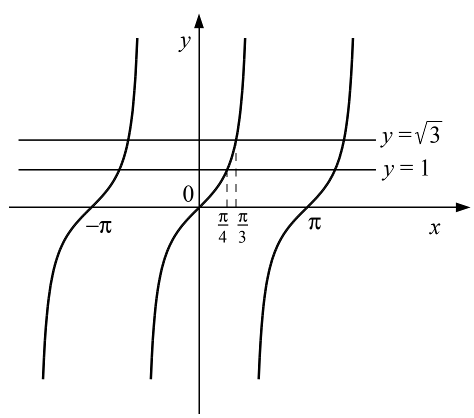
$$x \in \left\langle -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right\rangle,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

c) Rozwiążemy nierówność

$$1 < \operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}.$$

Szkicujemy wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$, $y = 1$ oraz $y = \sqrt{3}$



Rys. 3.26

Z wykresu odczytujemy, że rozwiązaniem danej nierówności podwójnej w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ jest

$$x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right\rangle.$$

Uwzględniając okresowość funkcji tangens mamy ostatecznie

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \right\rangle,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przy nierównościach, które nie są podstawowe, postępujemy podobnie, jak przy równaniach trygonometrycznych nie będących podstawowymi, aby ostatecznie dojść do nierówności podstawowych. Zilustrujemy to przykładami.

Przykład 3.48 *a) Rozwiążemy nierówność*

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 > 0.$$

Stosujemy podstawienie $t = \cos x \in \langle -1; 1\rangle$ *i otrzymujemy nierówność kwadratową*

$$2t^2 - 3t + 1 > 0.$$

Rozwiązaniem tej nierówności jest

$$t \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty).$$

Ponieważ równocześnie $t \in \langle -1; 1\rangle$*, więc otrzymujemy*

$$-1 \leqslant t < \frac{1}{2}.$$

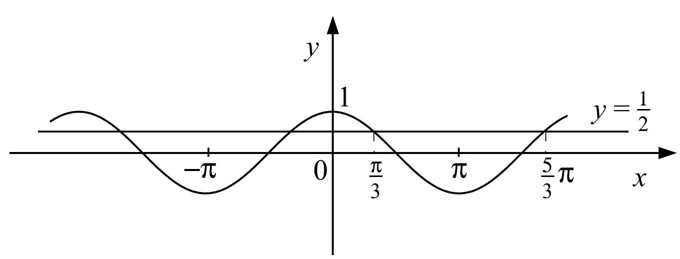
Mamy więc

$$-1 \leqslant \cos x < \frac{1}{2},$$

przy czym pierwsza z tych nierówności zachodzi dla każdego $x \in \mathbb{R}$*. Zatem mamy do rozwiązania nierówność podstawową*

$$\cos x < \frac{1}{2}.$$

Szkicujemy wykresy funkcji $y = \cos x$ *oraz* $y = \frac{1}{2}$



Rys. 3.27

Z rysunku odczytujemy, że w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$ *nierówność jest spełniona dla*

$$x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right).$$

Uwzględniając okresowość funkcji kosinus mamy ostateczne rozwiązanie

$$x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right),$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

b) Rozwiążemy nierówność

$$\cos^4 x + \sin^4 x \geqslant \frac{1}{2}.$$

Na mocy wzorów uproszczonego mnożenia nierówność powyższa jest równoważna nierówności

$$\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x \geqslant \frac{1}{2}$$

i dalej z "jedynki trygonometrycznej"

$$1 - 2\left(\sin x \cdot \cos x\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}$$

$$2\left(\sin x \cdot \cos x\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\left(2\sin x \cdot \cos x\right)^2 \leqslant 1.$$

Z wzoru na sinus podwojonego argumentu (2.12) dostajemy

$$\sin^2 2x \leqslant 1.$$

Zauważmy, że powyższa nierówność jest spełniona dla wszystkich x *na mocy ograniczoności funkcji sinus. Zatem rozwiązaniem danej nierówności trygonometrycznej jest* $\mathbb{R}$.

c) Rozwiążemy nierówność

$$\sin x + \cos x < \sqrt{2}.$$

Dzieląc tę nierónść przez $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ *dostajemy*

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x < 1.$$

Zauważmy, że $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. *Zatem powyższa nierówność jest równoważna nierówności*

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x < 1$$

i z wzoru na kosinus różnicy (2.11) otrzymujemy

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1.$$

Ponieważ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $\cos t \leqslant 1$, więc powyższa nierówność oznacza, że musimy wykluczyć ze zbioru $\mathbb{R}$ te x, dla których

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

W konsekwencji mamy

$$x - \frac{\pi}{4} \neq 2k\pi,$$

a stąd

$$x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Rozwiązaniem nierówności jest więc zbiór $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3.15 Równania wykładnicze

Definicja 3.49 *Równanie, w którym niewiadoma występuje wyłącznie pod znakiem funkcji wykładniczej nazywane jest równaniem wykładniczym.*

Rozwiązywanie równań wykładniczych polega, podobnie, jak to było dla równań trygonometrycznych, na sprowadzeniu równania do postaci podstawowej, czyli do postaci

$$a^{\delta} = a^{\gamma},$$

gdzie zarówno δ, jak i γ mogą zależeć od x. Równanie w postaci podstawowej rozwiązujemy korzystając z różnowartościowości funkcji wykładniczej.

Przykład 3.50 *a) Rozwiążemy równanie*

$$16^x + 4^{x+2} - 36 = 0.$$

Równanie to zapisujemy w równoważnej postaci wykorzystując własności działań na potęgach ((1.1), (1.3))

$$(4^x)^2 + 16 \cdot 4^x - 36 = 0.$$

Stosując podstawienie $t = 4^x > 0$ dostajemy równanie kwadratowe

$$t^2 + 16t - 36 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby

$$t = -18 \not> 0 \quad \vee \quad t = 2.$$

Zatem nasze równanie wykładnicze jest równoważne równaniu

$$4^x = 2,$$

czyli w postaci podstawowej

$$4^x = 4^{\frac{1}{2}}.$$

Na mocy różnowartościowości funkcji wykładniczej jedynym pierwiastkiem naszego równania jest

$$x = \frac{1}{2}.$$

b) Rozwiążemy równanie

$$\frac{1}{2^x - 1} = \frac{1}{1 - 2^{x-1}}.$$

Dziedziną równania jest zbiór tych x, dla których spełnione są zastrzeżenia

$$2^x - 1 \neq 0 \quad \wedge \quad 1 - 2^{x-1} \neq 0.$$

Z pierwszego zastrzeżenia dostajemy $2^x \neq 2^0$, więc $x \neq 0$, zaś z drugiego — $2^{x-1} \neq 2^0$, więc $x \neq 1$. Zatem dziedziną jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Wracając do równania mamy

$$\begin{aligned} 2^x - 1 &= 1 - 2^{x-1} \\ 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x &= 1 + 1 \\ \frac{3}{2} \cdot 2^x &= 2 \\ 2^x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

na mocy własności działań na potęgach (1.7). Korzystając teraz z Definicji 1.33 otrzymujemy

$$x = \log_2 \frac{4}{3}.$$

3.16 Równania logarytmiczne

Definicja 3.51 *Równaniem logarytmicznym nazywamy takie równanie, w którym niewiadoma występuje pod znakiem funkcji logarytmicznej.*

Podobnie jak dla równań wykładniczych, równania logarytmiczne będziemy sprowadzać do postaci podstawowej

$$\log_a \delta = \log_a \gamma,$$

gdzie zarówno δ, jak i γ mogą zależeć od niewiadomej x, a następnie będziemy opuszczać logarytm, wykorzystując różnowartościowość funkcji logarytmicznej (2.5.8).

Przykład 3.52 *a) Rozwiążemy równanie*

$$\log(x + 1) + \log(x - 2) = \log(x + 2).$$

Określimy dziedzinę równania

$$x+1>0 \ \wedge \ x-2>0 \ \wedge \ x+2>0$$

$$x>-1 \ \wedge \ x>2 \ \wedge \ x>-2.$$

Ostatecznie dziedziną jest $D=(2;\infty)$. *Korzystając z (1.4) dane równanie możemy zapisać równoważnie jako*

$$\log\left[(x+1)(x-2)\right]=\log(x+2).$$

Na mocy różnowartościowości funkcji logarytmicznej (2.5.8) mamy

$$(x+1)(x-2)=x+2.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób równanie kwadratowe

$$x^2-2x-4=0,$$

którego pierwiastkami są liczby

$$x=1-\sqrt{5} \quad \vee \quad x=1+\sqrt{5}.$$

Zauważmy, że tylko druga z tych liczb leży w dziedzinie równania. Zatem pierwiastkiem danego równania logarytmicznego jest $x=1+\sqrt{5}$.

b) Rozwiążemy równanie

$$\log\sqrt{x+21}+\frac{1}{2}\log(x-21)=1+\log 2.$$

Dziedziną tego równania jest $D=(21;\infty)$. *Wykorzystując wzory (1.4) przekształcamy równanie*

$$\log\sqrt{x+21}+\log(x-21)^{\frac{1}{2}}=1+\log 2$$

$$\log\sqrt{x+21}+\log\sqrt{x-21}=\log 10+\log 2$$

$$\log\left(\sqrt{x+21}\cdot\sqrt{x-21}\right)=\log(10\cdot 2)$$

$$\log\sqrt{(x+21)(x-21)}=\log 20$$

$$\log\sqrt{x^2-441}=\log 20.$$

Z różnowartościowości funkcji logarytmicznej mamy

$$\sqrt{x^2-441}=20.$$

Podnosząc stronami do kwadratu dostajemy

$$x^2-441=400$$

$$x^2-841=0$$

$$(x-29)(x+29)=0$$

$$x=-29 \quad \vee \quad x=29.$$

Uwzględniając dziedzinę dostajemy rozwiązanie danego równania

$$x=29.$$

c) Rozwiążemy równanie

$$\log_3 x - \frac{4}{\log_3 x} = 3.$$

Wyznaczamy dziedzinę:

$$x>0 \quad \wedge \quad \log_3 x \neq 0.$$

Z drugiego zastrzeżenia mamy $x \neq 1$. *Zatem dziedziną równania jest* $D=(0;1)\cup(1;\infty)$. *Stosując podstawienie* $t=\log_3 x$ *otrzymujemy równanie wymierne*

$$t-\frac{4}{t}=3.$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie kwadratowe

$$t^2-3t-4=0,$$

którego pierwiastkami są liczby

$$t=-1 \quad \vee \quad t=4.$$

Wracamy do podstawienia

$$\log_3 x=-1 \quad \vee \quad \log_3 x=4.$$

Z Definicji 1.33 otrzymujemy stąd

$$x=\frac{1}{3} \quad \vee \quad x=81.$$

Obie te liczby należą do dziedziny, więc są pierwiastkami danego równania logarytmicznego.

d) Rozwiążemy równanie

$$(\log_3 x)^2+\log_3 x^2-\log_3 27=0.$$

Dziedziną tego równania jest $D=(0;\infty)$. *Korzystając z (1.4), możemy równanie zapisać w postaci*

$$(\log_3 x)^2+2\log_3 x-3=0.$$

Podstawiając $t=\log_3 x$, *dostajemy równanie kwadratowe*

$$t^2+2t-3=0,$$

którego pierwiastkami są liczby

$$t = -3 \quad \vee \quad t = 1.$$

Stąd

$$\log_3 x = -3 \quad \vee \quad \log_3 x = 1$$

i z Definicji 1.33 mamy

$$x = \frac{1}{27} \quad \vee \quad x = 3.$$

Obie te liczby należą do dziedziny, więc są pierwiastkami danego równania logarytmicznego.

3.17 Nierówności wykładnicze

Definicja 3.53 *Nierówność wykładnicza to taka nierówność, w której niewiadoma występuje pod znakiem funkcji wykładniczej.*

Podobnie, jak dla równań, rozwiązywanie nierówności polega na sprowadzeniu do postaci podstawowej

$$a^\delta < a^\gamma \text{ lub } a^\delta \leqslant a^\gamma,$$

gdzie zarówno δ, jak i γ mogą zależeć od niewiadomej x, a następnie na wykorzystaniu monotoniczności funkcji wykładniczej.

Przykład 3.54 *a) Rozwiążemy nierówność*

$$9^x - 3^{x+1} - 4 < 0.$$

Stosujemy podstawienie $t = 3^x > 0$ *i otrzymujemy nierówność kwadratową*

$$t^2 - 3t - 4 < 0,$$

której rozwiązaniem jest przedział $(-1; 4)$. *Uwzględniając warunek* $t > 0$, *mamy* $t \in (0; 4)$. *Wracając do podstawienia uzyskujemy nierówność podwójną*

$$0 < 3^x < 4.$$

Pierwsza z tych nierówności jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, *pozostaje więc nierówność*

$$3^x < 4.$$

Z definicji logarytmu mamy, że $4 = 3^{\log_3 4}$. *Zatem*

$$3^x < 3^{\log_3 4}.$$

Ponieważ funkcja wykładnicza o podstawie większej od 1 *jest rosnąca, więc*

$$x < \log_3 4.$$

Ostatecznie rozwiązaniem danej nierówności wykładniczej jest

$$x \in (-\infty; \log_3 4).$$

b) Rozwiążemy nierówność

$$2^{x+1} - 3^x < 2^{x-1}.$$

Wykorzystując własności potęgowania mamy

$$2 \cdot 2^x - 3^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x < 0$$

$$\frac{3}{2} \cdot 2^x < 3^x \mid \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^x}\right)$$

$$\frac{2^x}{3^x} < \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^1.$$

Ponieważ funkcja wykładnicza o podstawie z przedziału $(0; 1)$ *jest malejąca, więc otrzymujemy ostateczne rozwiązanie danej nierówności wykładniczej*

$$x > 1.$$

3.18 Nierówności logarytmiczne

Definicja 3.55 *Nierównością logarytmiczną nazywamy taką nierówność, w której niewiadoma występuje pod znakiem funkcji logarytmicznej.*

Zachodzi pełna analogia między metodą rozwiązywania nierówności wykładniczych i logarytmicznych.

Przykład 3.56 *a) Rozwiążemy nierówność*

$$\log x + \log (x+1) < \log (2x+6).$$

Określamy dziedzinę tej nierówności

$$x > 0 \ \wedge \ x+1 > 0 \ \wedge \ 2x+6 > 0,$$

skąd dostajemy

$$x > 0 \ \wedge \ x > -1 \ \wedge \ x > -3$$

i dziedziną nierówności jest $D = (0; \infty)$. *Korzystając z własności logarytmu, możemy naszą nierówność zapisać w postaci*

$$\log [x (x+1)] < \log (2x+6).$$

Z monotoniczności funkcji logarytmicznej mamy

$$x(x+1) < 2x+6$$

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

Rozwiązaniem otrzymanej nierówności kwadratowej jest przedział $(-2;3)$. *Po uwzględnieniu dziedziny dostajemy rozwiązanie danej nierówności logarytmicznej*

$$x \in (0;3).$$

b) Rozwiążemy nierówność

$$\log_{0,4}\left(x^2 - 2x - 1\right) > 0.$$

Dziedziną jest zbiór tych x*, dla których* $x^2 - 2x - 1 > 0$*, czyli*

$$D = \left(-\infty; 1-\sqrt{2}\right) \cup \left(1+\sqrt{2}; \infty\right).$$

Prawą stronę nierówności możemy zapisać jako $\log_{0,4} 1$. *Mamy więc*

$$\log_{0,4}\left(x^2 - 2x - 1\right) > \log_{0,4} 1.$$

Podstawą logarytmu jest liczba mniejsza od jedynki, więc funkcja logarytmiczna jest w tym wypadku malejąca i dostajemy

$$x^2 - 2x - 1 < 1$$

$$x^2 - 2x - 2 < 0.$$

Rozwiązaniem tej nierówności kwadratowej jest przedział $\left(1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\right)$. *Uwzględniając dziedzinę, otrzymujemy ostateczne rozwiązanie danej nierówności logarytmicznej*

$$x \in \left(1-\sqrt{3}; 1-\sqrt{2}\right) \cup \left(1+\sqrt{2}; 1+\sqrt{3}\right).$$

c) Rozwiążemy nierówność

$$\log_{2x-3}\left(3x^2 - 7x + 3\right) < 2.$$

Dziedziną nierówności jest zbiór tych wszystkich x*, dla których spełnione są warunki*

$$3x^2 - 7x + 3 > 0 \ \wedge\ 2x - 3 > 0 \ \wedge\ 2x - 3 \neq 1,$$

czyli

$$x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{13}}{6}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{13}}{6}; +\infty\right) \ \wedge\ x > \frac{3}{2} \ \wedge\ x \neq 2.$$

Biorąc część wspólną tych trzech rozwiązań dostajemy dziedzinę

$$D = \left(\frac{7+\sqrt{13}}{6}; 2 \right) \cup (2; +\infty),$$

bo $\frac{3}{2} < \frac{7+\sqrt{13}}{6} < 2$. *Zauważmy, że daną nierówność, na mocy definicji logarytmu daje się zapisać w postaci*

$$\log_{2x-3}\left(3x^2 - 7x + 3\right) < \log_{2x-3}(2x-3)^2 . \tag{3.16}$$

Rozważymy dwa przypadki

1) $x \in \left(\frac{7+\sqrt{13}}{6}; 2 \right)$. *Wtedy podstawa logarytmu jest z przedziału* $(0; 1)$ *i funkcja logarytmiczna o tej podstawie jest malejąca. Zatem nierówność (3.16) daje nam*

$$3x^2 - 7x + 3 > (2x-3)^2$$
$$3x^2 - 7x + 3 > 4x^2 - 12x + 9$$
$$x^2 - 5x + 6 < 0.$$

Rozwiązaniem otrzymanej nierówności kwadratowej jest przedział $(2; 3)$, *który jest rozłączny z przedziałem* $\left(\frac{7+\sqrt{13}}{6}; 2 \right)$. *Zatem w tym przypadku nie istnieją liczby spełniające daną nierówność.*

2) $x \in (2; \infty)$. *Wtedy podstawa logarytmu jest większa od* 1 *i funkcja logarytmiczna jest rosnąca. Zatem nierówność (3.16) daje nam*

$$3x^2 - 7x + 3 < (2x-3)^2$$
$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Rozwiązaniem otrzymanej nierówności kwadratowej jest zbiór $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. *Uwzględniając zastrzeżenie aktualnego przypadku dostajemy rozwiązanie w tym przypadku*

$$x \in (3; +\infty) .$$

Ostatecznie rozwiązaniem danej nierówności jest przedział $(3; +\infty)$.

Rozdział 4

Ciągi

4.1 Pojęcie ciągu

Definicja 4.1 *Ciągiem nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych* $\mathbb{N}$ *lub na jego skończonym podzbiorze* $\{1, 2, ..., k\}$.

W tym pierwszym przypadku ciąg nazywamy *nieskończonym,* w drugim — *skończonym* k*-wyrazowym.* Wartości takiej funkcji nazywamy *wyrazami ciągu.* Dokładniej, wartość funkcji dla liczby naturalnej n nazywamy n*-tym wyrazem ciągu.* Na oznaczenie n-tego wyrazu ciągu będziemy używać oznaczeń typu a_n, b_n,..., x_n, y_n, itp. Ciąg, którego n-ty wyraz oznaczony jest przez a_n, oznaczać będziemy symbolem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli ciąg jest nieskończony lub symbolem $(a_n)_{n\in\{1,...,k\}}$, jeśli ciąg jest k-wyrazowy (często napis $n \in \mathbb{N}$ lub $n \in \{1, ..., k\}$ będziemy opuszczać, gdyż na ogół z kontekstu jest jasne jaka jest dziedzina danego ciągu).

Definicja 4.2 *Ciąg, którego wyrazy są liczbami rzeczywistymi nazywamy liczbowym.*

W dalszym ciągu zajmować się będziemy wyłącznie ciągami liczbowymi, więc mówiąc o ciągu będziemy mieli na myśli ciąg liczbowy. Co więcej, na ogół będzie to ciąg nieskończony, jednak w niektórych przykładach pojawią się także ciągi skończone.

Aby określić ciąg możemy albo wypisać wszystkie jego wyrazy, albo podać wzór na n-ty wyraz. Ta pierwsza metoda daje się stosować w przypadku ciągów skończonych, np.

$$(2, 3, 5, 7, 11, 13)\,.$$

Jest to ciąg liczb pierwszych mniejszych od 15. Czasami także tej metody opisu używamy w odniesieniu do ciągów nieskończonych, np. pisząc

$$(2, 4, 6, 8, 10, ...)\,,$$

domyślamy się, że chodzi o ciąg liczb naturalnych parzystych. Ten sposób opisu ciągów nieskończonych nie jest w pełni precyzyjny i będziemy go rzadko stosować. Powyższy ciąg nieskończony możemy określić precyzyjnie podając wzór na jego n-ty wyraz:

$$a_n = 2n$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Czasami dla określenia ciągu podajemy tzw. *wzory rekurencyjne (indukcyjne)*. Polega to na tym, że podajemy wzór na pierwszy wyraz ciągu, a następnie określamy jak $(n+1)$-szy wyraz tego ciągu zależy od n-tego.

Przykład 4.3 *Rozważmy ciąg zadany rekurencyjnie wzorami*

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 1 + (-1)^n a_n \end{cases}.$$

Obliczymy pięć pierwszych wyrazów tego ciągu:

$$\begin{aligned} &a_1 = 3 \text{ na mocy określenia,} \\ &a_2 = 1 + (-1)^1 \cdot 3 = -2 \\ &a_3 = 1 + (-1)^2 \cdot (-2) = -1 \\ &a_4 = 1 + (-1)^3 \cdot (-1) = 2 \\ &a_5 = 1 + (-1)^4 \cdot 2 = 3. \end{aligned}$$

4.2 Własności ciągów

Jedną z podstawowych, często badanych własności ciągu jest jego monotoniczność.

Definicja 4.4 *Ciąg (a_n) nazywamy rosnącym (odpowiednio malejącym), gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność*

$$a_{n+1} > a_n \text{ (odpowiednio } a_{n+1} < a_n\text{).}$$

Ciąg (a_n) nazywamy niemalejącym (odpowiednio nierosnącym), gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$a_{n+1} \geqslant a_n \text{ (odpowiednio } a_{n+1} \leqslant a_n\text{).}$$

Ciągi rosnące i malejące nazywamy monotonicznymi. Ponadto ciąg (a_n) nazywamy stałym, gdy istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $a_n = a$.

Przykład 4.5 *a) Sprawdzimy monotoniczność ciągu (a_n) danego wzorem $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. W tym celu bierzemy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i dla tego n obliczymy różnicę $a_{n+1} - a_n$. Zauważmy, że na mocy wzoru określającego ciąg mamy $a_{n+1} = 2 \cdot 3^{(n+1)-1} = 2 \cdot 3^n$. Obliczamy różnicę*

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 2 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \\ &= 2 \cdot 3^{n-1} \cdot (3-1) = 4 \cdot 3^{n-1} > 0. \end{aligned}$$

Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ dostaliśmy $a_{n+1} > a_n$, czyli ciąg (a_n) jest rosnący.

b) Sprawdzimy monotoniczność ciągu (b_n) danego wzorem $b_n = \frac{4}{n+5}$. Bierzemy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i postępując, jak wyżej, mamy kolejno $b_{n+1} = \frac{4}{n+6}$,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{4}{n+6} - \frac{4}{n+5} = \frac{4(n+5) - 4(n+6)}{(n+6)(n+5)} \\ &= \frac{4n + 20 - 4n - 24}{(n+6)(n+5)} = -\frac{4}{(n+6)(n+5)} < 0. \end{aligned}$$

Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ otrzymaliśmy nierówność $b_{n+1} < b_n$, czyli ciąg (b_n) jest malejący.

Istnieją oczywiście ciągi, które nie są monotoniczne, nie są bowiem ani rosnące, ani malejące. Przykładem takiego ciągu jest ciąg (c_n) o n-tym wyrazie $c_n = n^3 - 9n^2 + 20n - 12$, dla którego znak różnicy

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= (n+1)^3 - 9(n+1)^2 + 20(n+1) - 12 - n^3 + 9n^2 - 20n + 12 \\ &= 3n^2 + 3n + 1 - 18n - 9 + 20 = 3n^2 - 15n + 12 \end{aligned}$$

zależy od n. Istotnie,

$$\begin{aligned} c_3 - c_2 &= 12 - 30 + 12 < 0, \\ c_6 - c_5 &= 75 - 75 + 12 > 0. \end{aligned}$$

Definicja 4.6 *Ciąg (a_n) będziemy nazywać ograniczonym, gdy istnieją liczby m, M takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność podwójna*

$$m \leqslant a_n \leqslant M.$$

Przykład 4.7 *Przykładami ciągów ograniczonych są ciągi zadane wzorami*

$$\begin{aligned} a_n &= a, \text{ gdzie } a \text{ jest ustaloną liczbą rzeczywistą,} \\ b_n &= (-1)^n, \\ c_n &= \sin(2n+1), \\ d_n &= \cos(n!). \end{aligned}$$

4.3 Granica ciągu

Definicja 4.8 *Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy granicą ciągu (a_n), gdy*

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{N_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geqslant N_0} |a_n - g| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Fakt, że liczba g jest granicą ciągu (a_n) zapisywać będziemy w postaci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ lub w postaci $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$, a czasami nawet w postaci $a_n \to g$.

Zauważmy, że zgodnie z Definicją 1.26 nierówność występująca w (4.1) oznacza, że n-ty wyraz ciągu (a_n) leży w otoczeniu o promieni ε punktu g. Kwantyfikatory stojące przed tą nierównością mówią nam, że otoczenie, o którym mowa ma dowolny promień oraz że wszystkie wyrazy ciągu poczynając od wyrazu z numerem N_0 spełniają tę nierówność. W konsekwencji tylko skończona ilość wyrazów ciągu (mianowicie wyrazy $a_1, ..., a_{N_0-1}$) może leżeć poza tym dowolnym otoczeniem. Zatem warunek definiujący pojęcie granicy $g \in \mathbb{R}$ możemy sformułować następująco:

Liczba g jest granicą ciągu (a_n), gdy w dowolnym otoczeniu liczby g leżą wszystkie wyrazy ciągu z wyjątkiem być może skończonej ich ilości.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g \in \mathbb{R}$, to będziemy także mówić, że ciąg dąży do g lub, że jest zbieżny do g.

Łatwo widać, że jeżeli ciąg (a_n) jest stały i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $a_n = a$, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Istotnie, wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wyrażenie $|a_n - a|$ jest zerem, więc zawsze jest mniejsze od dodatniego ε.

Definicja 4.9 *Mówimy, że $+\infty$ (odpowiednio $-\infty$) jest granicą ciągu (a_n), co zapisujemy symbolicznie w postaci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (odpowiednio $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) lub w postaci $a_n \to +\infty$ (odp. $a_n \to -\infty$), gdy*

$$\bigwedge_{M\in\mathbb{R}} \bigvee_{N_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\geqslant N_0} a_n > M \text{ (odpowiednio } a_n < M). \tag{4.2}$$

Zauważmy, że w tym przypadku nierówność występująca w warunku (4.2) oznacza, że n-ty wyraz ciągu leży w przedziale $(M; \infty)$ (odpowiednio $(-\infty; M)$), czyli w otoczeniu $+\infty$ (odpowiednio $-\infty$). Zatem w tym przypadku możemy definicję sformułować następująco:

Granicą ciągu (a_n) jest $+\infty$ (odp. $-\infty$), gdy w dowolnym otoczeniu $+\infty$ (odp. $-\infty$) leżą wszystkie wyrazy tego ciągu z wyjątkiem być może skończonej ich ilości.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (odp. $-\infty$), to będziemy także mówić, że ciąg (a_n) dąży do $+\infty$ (odp. $-\infty$) lub, że ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ (odp. $-\infty$).

Istnieją ciągi, które nie mają żadnej granicy. Przykładem takiego ciągu jest ciąg (a_n) zadany wzorem $a_n = (-1)^n$.

Definicja 4.10 *Ciągiem zbieżnym nazywamy ciąg, który ma granicę skończoną $g \in \mathbb{R}$. W przeciwnym wypadku ciąg nazywamy rozbieżnym.*

Zauważmy, że ciągami rozbieżnymi są wobec tego zarówno ciągi dążące do $\pm\infty$, jak i ciągi, które w ogóle granicy nie posiadają.

Przykład 4.11 *a) Pokażemy z definicji, że* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. *Weźmy dowolne* $\varepsilon > 0$. *Musimy odpowiedzieć na pytanie: dla jakich* n *spełniona jest nierówność*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon?$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \tag{4.3}$$

i jej rozwiązaniem są liczby $n > \frac{1}{\varepsilon}$. *Zatem definiując* N_0 *jako najmniejszą liczbę naturalną, która jest większa od* $\frac{1}{\varepsilon}$ *otrzymujemy, że dla* $n \geqslant N_0$ *zachodzi nierówność (4.3). Zatem dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *wskazaliśmy* N_0 *takie, że dla* $n \geqslant N_0$ *spełniona jest nieróność* $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ *i w konsekwencji na mocy definicji mamy* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

b) Pokażemy z definicji, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+n}{2n+5} = \frac{1}{2}$. *Weźmy dowolne* $\varepsilon > 0$ *i rozważmy nierówność*

$$\left|\frac{2+n}{2n+5} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Równoważnie mamy

$$\left|\frac{2\,(2+n) - 2n - 5}{2\,(2n+5)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-1}{2\,(2n+5)}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2\,(2n+5)} < \varepsilon.$$

Stąd obliczamy n

$$2n + 5 > \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}.$$

Definiując N_0 *jako najmniejszą liczbę naturalną spełniającą ostatnią nierówność, otrzymujemy, że dla dowolnego* $n \geqslant N_0$ *spełniona jest nierówność (4.4). Zatem na mocy definicji mamy* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+n}{2n+5} = \frac{1}{2}$.

c) Pokażemy teraz, że $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2 + 2\right) = \infty$. *Weźmy dowolne* $M \in \mathbb{R}$ *i rozważmy nierówność*

$$n^2 + 2 > M. \tag{4.5}$$

Równoważnie

$$n^2 > M - 2.$$

Zauważmy, że nierówność ta jest spełniona dla wszystkich n, *gdy* $M \leqslant 2$. *Jeżeli zaś* $M > 2$, *to rozwiązaniem tej nierówności jest*

$$n < -\sqrt{M-2} \quad \vee \quad n > \sqrt{M-2}.$$

Definiując N_0 jako najmniejszą liczbę naturalną spełniającą drugą z powyższych nierówności, otrzymujemy, że dla dowolnego $n \geqslant N_0$ spełniona jest nierówność (4.5). Zatem na mocy definicji mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2+2\right) = \infty$.

d) Pokażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Weźmy dowolne $M \in \mathbb{R}$ i rozważmy nierówność

$$\sqrt{n} > M. \tag{4.6}$$

Jeżeli $M \leqslant 0$, to nierówność ta jest spełniona dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli zaś $M > 0$, to nasza nierówność jest równoważna nierówności

$$n > M^2.$$

Wystarczy więc wziąć za N_0 najmmniejszą liczbę naturalną taką, że $N_0 > M^2$, aby dla $n \geqslant N_0$ zachodziła nierówność (4.6). Zatem na mocy definicji mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

e) Pokażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n^2}{n+1} = -\infty$. Weźmy dowolne $M \in \mathbb{R}$ i rozważmy nierówność

$$\frac{2-n^2}{n+1} < M. \tag{4.7}$$

Równoważnie

$$2 - n^2 < Mn + M$$

$$n^2 + Mn + M - 2 > 0. \tag{4.8}$$

Oczywiście chcemy rozwiązać tę nierówność względem niewiadomej n, traktując M jako parametr. Wyróżnik lewej strony wynosi

$$\Delta = M^2 - 4M + 8.$$

Zauważmy, że wyrażenie to jest dodatnie dla każdego $M \in \mathbb{R}$, zatem rozwiązaniem nierówności (4.8) jest

$$n < \frac{-M - \sqrt{M^2 - 4M + 8}}{2} \quad \vee \quad n > \frac{-M + \sqrt{M^2 - 4M + 8}}{2}.$$

Definiując N_0 jako najmniejszą liczbę naturalną spełniającą drugą z powyższych nierówności, otrzymujemy, że dla dowolnego $n \geqslant N_0$ spełniona jest nierówność (4.7). Zatem na mocy definicji mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n^2}{n+1} = -\infty$.

Zachodzi bardzo ważne

Twierdzenie 4.12 *Jeżeli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.*

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Istotnie, ciąg o n-tym wyrazie $a_n = (-1)^n$ jest ograniczony, gdyż jego wyrazy leżą w przedziale $\langle -1; 1\rangle$, ale nie posiada granicy, więc nie jest zbieżny. Okazuje się jednak, że zachodzi

Twierdzenie 4.13 *Jeżeli ciąg jest ograniczony i monotoniczny, to jest zbieżny.*

Z Przykładu 4.11 widać, że definicja granicy nie umożliwia nam obliczania granic (aby skorzystać z definicji trzeba znać granicę). W związku z tym podamy teraz pewne twierdzenia, które umożliwią nam obliczanie granic.

Twierdzenie 4.14 *(o trzech ciągach) Załóżmy, że dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi nierówność podwójna* $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. *Jeżeli ciągi* (a_n) *i* (c_n) *są zbieżne, przy czym* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, *to ciąg* (b_n) *jest także zbieżny i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Zachodzą także analogiczne twierdzenia dla ciągów rozbieżnych do ∞ :

Twierdzenie 4.15 *Załóżmy, że dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi nierówność* $a_n \leqslant b_n$. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Twierdzenie 4.16 *Jeżeli ciągi* (a_n) *i* (b_n) *są zbieżne oraz*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ \ i \ \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

oraz $k \in \mathbb{R}$, *to ciągi* $(k \cdot a_n)$, $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ *oraz* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *(przy dodatkowym założeniu, że* $b \neq 0$ *i* $b_n \neq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*) są także zbieżne i przy tym zachodzą wzory*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (k \cdot a_n) &= k \cdot a, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= a + b, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) &= a - b, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= a \cdot b, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a}{b}.
\end{aligned}$$

Czasami tezę powyższego twierdzenia wypowiada się mówiąc, że np. granica sumy jest równa sumie granic. Trzeba jednak pamiętać o założeniu, które mówi, że oba ciągi są zbieżne. Bez tego założenia to uproszczone sformułowanie twierdzenia nie ma sensu.

Twierdzenie 4.17 *Jeżeli ciąg* (a_n) *o wyrazach nieujemnych jest zbieżny i*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

to ciąg $\left(\sqrt{a_n}\right)$ *jest zbieżny i zachodzi równość* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Twierdzenie 4.18 *Jeżeli ciąg* (a_n) *jest ograniczony i ciąg* (b_n) *jest rozbieżny do* $+\infty$ *lub* $-\infty$, *to ciąg* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *jest zbieżny i*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Z Twierdzenia 4.12 wynika, że w szczególności jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny i ciąg (b_n) jest rozbieżny do $\pm\infty$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny do zera.

Twierdzenie 4.19 *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ *(skończone lub nie) i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, *przy czym dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *spełniona jest nierówność* $b_n > 0$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

Oczywiście prawdziwe są jeszcze trzy inne wersje tego twierdzenia

$$\begin{aligned}
&\text{jeżeli } a > 0 \text{ i } b_n < 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}, \text{ to } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty,\\
&\text{jeżeli } a < 0 \text{ i } b_n > 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}, \text{ to } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty,\\
&\text{jeżeli } a < 0 \text{ i } b_n < 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}, \text{ to } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.
\end{aligned}$$

Dodatkowo przyjmujemy umowy:

$$\begin{aligned}
a \in \mathbb{R}, \text{ to } & [a + \infty] = +\infty\\
a \in \mathbb{R}, \text{ to } & [a - \infty] = -\infty\\
& [\infty + \infty] = +\infty\\
& [-\infty - \infty] = -\infty\\
a \in \mathbb{R} \text{ i } a > 0, \text{ to } & [a \cdot \infty] = +\infty\\
a \in \mathbb{R} \text{ i } a < 0, \text{ to } & [a \cdot \infty] = -\infty\\
a \in \mathbb{R} \text{ i } a > 0, \text{ to } & [a \cdot (-\infty)] = -\infty\\
a \in \mathbb{R} \text{ i } a < 0, \text{ to } & [a \cdot (-\infty)] = +\infty\\
& [\infty \cdot \infty] = +\infty\\
& [(-\infty) \cdot \infty] = -\infty\\
& [(-\infty) \cdot (-\infty)] = +\infty.
\end{aligned}$$

Każdą z powyższych umów można sformułować jako twierdzenie, np. umowa szósta przetłumaczyłaby się na twierdzenie w następujący sposób:

Twierdzenie 4.20 *Jeżeli ciąg* (a_n) *jest zbieżny, przy czym* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$.

Jeżeli teraz przeanalizujemy powyższe twierdzenia i umowy wiążące pojęcie granicy z działaniami arytmetycznymi, to łatwo zauważymy, że pewne sytuacje nie zostały w nich rozpatrzone. Takimi sytuacjami są

$$\frac{\infty}{\infty}\ ,\ \frac{0}{0}\ ,\ 0 \cdot \infty\ ,\ \infty - \infty,$$

czyli sytuacje, w których

1) obliczamy granicę ilorazu ciągów, przy czym i licznik i mianownik dążą równocześnie do zera lub równocześnie do którejkolwiek nieskończoności,

2) obliczamy granicę iloczynu ciągów, przy czym jeden ciąg dąży do zera, a drugi do nieskończoności,

3) obliczamy granicę sumy ciągów, przy czym jeden składnik dąży do $+\infty$, a drugi do $-\infty$.

Opisane wyżej sytuacje stanowią tzw. *symbole nieoznaczone*. W przypadku symboli nieoznaczonych nie możemy natychmiast odpowiedzieć ile dana granica wynosi. Musimy najpierw pozbyć się nieoznaczoności. W przypadku dwóch pierwszych symboli nieoznaczonych skracanie danego ułamka przez czynnik, który powoduje, że w mianowniku jest 0 lub ∞ zwykle wyprowadza nas z sytuacji nieoznaczonej. Dla symbolu $0 \cdot \infty$ (obliczamy granicę $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$, przy czym $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$) przekształcenie

$$a_n \cdot b_n = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}}$$

sprowadza symbol $0 \cdot \infty$ do symbolu $\frac{0}{0}$, zaś przekształcenie

$$a_n \cdot b_n = \frac{b_n}{\frac{1}{a_n}}$$

— do symbolu $\frac{\infty}{\infty}$. Wreszcie w przypadku symbolu nieoznaczonego $\infty - \infty$ stosujemy jedną z trzech metod:

1) Jeżeli wyrazy obu ciągów są ułamkami, to sprowadzamy je do wspólnego mianownika.

2) Jeżeli wyrazy obu ciągów dają się zapisać jako pierwiastki kwadratowe, to korzystamy z wzoru

$$a_n - b_n = \frac{(a_n - b_n)(a_n + b_n)}{a_n + b_n} = \frac{(a_n)^2 - (b_n)^2}{a_n + b_n},$$

czyli rozszerzamy wyrażenie, którego granicę obliczamy, przez sumę odpowiednich pierwiastków.

3) W pozostałych przypadkach wyłączamy przed nawias czynnik, który powoduje, że jeden ze składników dąży do nieskończoności.

W przykładach zilustrujemy omówione tutaj metody.

Przykład 4.21 *a) Obliczymy granicę* $\lim_{n\to\infty}\left(n^2 - 5n - 3\right)$. *Zauważmy, że* $n^2 \to +\infty$ *na mocy umowy* $[\infty \cdot \infty] = \infty$ *oraz że* $5n + 3 \to +\infty$, *bo* $[a \cdot \infty] = \infty$ *oraz* $[a + \infty] = \infty$. *W związku z tym mamy tu do czynienia z symbolem nieoznaczonym* $\infty - \infty$. *Obliczając granicę wyłączymy przed nawias wyrażenie* n^2

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2 - 5n - 3\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(1 - \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2}\right).$$

Zauważmy, że $\frac{5}{n} \to 0$ *i* $\frac{3}{n^2} \to 0$, *bo w obu ułamkach liczniki są stałe, więc ograniczone a mianowniki dążą do* ∞. *Zatem na mocy Twierdzenia 4.16 mamy*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}\right)=1.$$

W konsekwencji

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}\right)=[\infty\cdot 1]=+\infty.$$

b) Obliczmy teraz granicę $a_n = \frac{2n^2+3n-7}{4+n-3n^2}$. *Zauważmy, że licznik dąży do* $+\infty$, *bo* $[\infty+\infty]=\infty$ *i* $[\infty+a]=\infty$ *oraz, że mianownik jest symbolem nieoznaczonym* $\infty-\infty$, *który rozwiązujemy, jak w przykładzie a) i widzimy, że mianownik dąży do* $-\infty$. *Zatem granica naszego ciągu daje symbol nieoznaczony typu* $\frac{\infty}{\infty}$. *Licząc granicę skrócimy ten ułamek przez* n^2, *czyli przez wyrażenie, które powoduje, że mianownik dąży do nieskończoności*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-7}{4+n-3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}}{\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n}-3}=-\frac{2}{3},$$

na mocy Twierdzenia 4.16, bo ułamki występujące w liczniku i mianowniku dążą do 0.

c) Obliczmy granicę ciągu $a_n = \frac{2n^3+n^2-5}{1+n-n^2}$. *Znowu mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym* $\frac{\infty}{\infty}$. *Postępujemy podobnie, jak w przykładzie b)*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2-5}{1+n-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1-\frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}-1}=\left[\frac{\infty}{-1}\right]=[\infty\cdot(-1)]=-\infty.$$

d) Obliczmy granicę ciągu $a_n = \frac{n^2+1}{n+1}-\frac{n^2-1}{2n}$. *Analogicznie, jak w przykładzie c) pokazuje się, że zarówno* $\frac{n^2+1}{n+1}$, *jak i* $\frac{n^2-1}{2n}$ *dąży do* $+\infty$. *Zatem w tym przykładzie mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym typu* $\infty-\infty$. *Obliczymy tę granicę sprowadzając do wspólnego mianownika*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}-\frac{n^2-1}{2n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+2n-n^3-n^2+n+1}{2n\,(n+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+3n+1}{2n^2+2n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{2}{n}}=\left[\frac{\infty}{2}\right]=+\infty.\end{aligned}$$

e) Obliczmy granicę ciągu $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$. *Zauważmy, że zarówno* $\sqrt{n}$, *jak i* $\sqrt{n+\sqrt{n}}$ *dąży do* $+\infty$. *Istotnie, z Przykładu 4.11 d) mamy, że* $\sqrt{n}\to\infty$ *i ponieważ dla każdego* n *zachodzi nierówność* $\sqrt{n}\leqslant\sqrt{n+\sqrt{n}}$, *więc z Twierdzenia 4.15 dostajemy* $\sqrt{n+\sqrt{n}}\to\infty$. *Zatem w naszym przykładzie* *mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym* $\infty - \infty$. *Obliczymy naszą granicę rozszerzając przez wyrażenie* $\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\\ &= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}}+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

na mocy Twierdzenia 4.16.

f) Obliczymy granicę ciągu $a_n = \frac{\sin\left(n^2+1\right)}{2n-1}$. *Zauważmy, że ciąg* $\left(\sin\left(n^2+1\right)\right)$ *jest ograniczony i ciąg* $(2n-1)$ *jest rozbieżny do* $+\infty$, *więc na mocy Twierdzenia 4.18 mamy*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(n^2+1\right)}{2n-1} = 0.$$

4.4 Ciąg arytmetyczny i geometryczny

Definicja 4.22 *Ciąg liczbowy* (a_n) *nazywamy arytmetycznym, gdy istnieje taka liczba rzeczywista* r, *zwana różnicą ciągu arytmetycznego, że dla każdej liczby naturalnej* n *spełniony jest warunek:*

$$a_{n+1} = a_n + r.$$

Ciąg arytmetyczny jest całkowicie określony przez swój pierwszy wyraz i różnicę. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 4.23 *Jeżeli* (a_n) *jest ciągiem arytmetycznym o różnicy* r *to jego* n*-ty wyraz opisuje się wzorem*

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r.$$

Dla ciągu arytmetycznego łatwo badać monotoniczność.

Twierdzenie 4.24 *Ciąg arytmetyczny* (a_n) *o różnicy* r *jest rosnący (odpowiednio malejący) wtedy i tylko wtedy, gdy* $r > 0$ *(odpowiednio* $r < 0$*). Dla* $r = 0$ *ciąg* (a_n) *jest stały.*

Przykład 4.25 *a) Rozważmy ciąg arytmetyczny* (a_n) *o pierwszym wyrazie* $a_1 = 2$ *i różnicy* $r = 3$. *Na mocy Twierdzenia 4.23 mamy wzór na jego* n*-ty wyraz*

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 1.$$

Zatem pierwsze pięć wyrazów tego ciągu to

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_2 &= 5, \\ a_3 &= 8, \\ a_4 &= 11, \\ a_5 &= 14. \end{aligned}$$

Możemy także obliczyć setny wyraz tego ciągu

$$a_{100} = 3 \cdot 100 - 1 = 299.$$

b) Załóżmy, że ciąg (a_n) *zadany jest wzorem* $a_n = 5 - 7n$. *Pokażemy, że ciąg ten jest arytmetyczny. Weźmy dowolne* $n \in \mathbb{N}$ *i obliczmy różnicę*

$$a_{n+1} - a_n = 5 - 7(n+1) - 5 + 7n = -7.$$

Z obliczeń tych wynika, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$a_{n+1} = a_n - 7.$$

W konsekwencji ciąg (a_n) *jest arytmetyczny o różnicy* -7 *na mocy definicji.*

c) Niech (a_n) *będzie ciągiem arytmetycznym. Załóżmy, że zachodzą związki*

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_7 - a_3 & = 8 \\ a_2 \cdot a_7 & = 75 \end{array} \right. . \tag{4.9}$$

Wyznaczymy pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n). *Stosując Twierdzenie 4.23, możemy warunki (4.9) zapisać w postaci*

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1 + 6r - a_1 - 2r & = 8 \\ (a_1 + r)(a_1 + 6r) & = 75 \end{array} \right. .$$

Z pierwszego z tych równań mamy $4r = 8$, *czyli* $r = 2$. *Podstawiając do drugiego równania dostajemy*

$$(a_1 + 2)(a_1 + 12) = 75.$$

Stąd

$$(a_1)^2 + 14a_1 - 51 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są $a_1 = -17$ *lub* $a_1 = 3$. *Zatem istnieją dwa ciągi arytmetyczne spełniające warunki (4.9), mianowicie jeden o pierwszym wyrazie* -17 *i różnicy* 2 *oraz drugi o pierwszym wyrazie* 3 *i różnicy* 2.

Definicja 4.26 *Ciąg liczbowy* (a_n) *nazywamy geometrycznym, gdy istnieje taka liczba rzeczywista* q, *zwana ilorazem ciągu geometrycznego, że dla każdej liczby naturalnej* n *spełniony jest warunek:*

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Ciąg geometryczny jest całkowicie określony przez swój pierwszy wyraz a_1 i iloraz q. Zachodzi

Twierdzenie 4.27 *Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to jego n-ty wyraz opisuje się wzorem*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Przykład 4.28 *a) Rozważmy ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = 2$ i ilorazie $q = -\frac{1}{3}$. Na mocy Twierdzenia 4.27 mamy wzór na jego n-ty wyraz*

$$a_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Zatem pierwsze pięć wyrazów tego ciągu to

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_2 &= -\frac{2}{3}, \\ a_3 &= \frac{2}{9}, \\ a_4 &= -\frac{2}{27}, \\ a_5 &= \frac{2}{81}. \end{aligned}$$

Możemy także obliczyć setny wyraz tego ciągu

$$a_{100} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{99}.$$

b) Załóżmy, że ciąg (a_n) zadany jest wzorem $a_n = \frac{3^{n+1}}{2 \cdot 5^n}$. Pokażemy, że ciąg ten jest geometryczny. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i obliczmy iloraz

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+2}}{2 \cdot 5^{n+1}}}{\frac{3^{n+1}}{2 \cdot 5^n}} = \frac{3^{n+2} \cdot 2 \cdot 5^n}{3^{n+1} \cdot 2 \cdot 5^{n+1}} = \frac{3}{5}.$$

Z obliczeń tych wynika, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{3}{5}.$$

W konsekwencji ciąg (a_n) jest geometryczny o ilorazie $\frac{3}{5}$ na mocy definicji.

c) Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym. Załóżmy, że zachodzą związki

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_2 + a_5 - a_4 & = 10 \\ a_3 + a_6 - a_5 & = 20 \end{array} \right. . \tag{4.10}$$

Wyznaczymy pierwszy wyraz i iloraz ciągu (a_n). Stosując Twierdzenie 4.27, możemy warunki (4.10) zapisać w postaci

$$\begin{cases} a_1q + a_1q^4 - a_1q^3 & = 10 \\ a_1q^2 + a_1q^5 - a_1q^4 & = 20 \end{cases}.$$

Wyłączając wspólne czynniki przed nawias w obu równaniach mamy

$$\begin{cases} a_1q\left(1 + q^3 - q^2\right) & = 10 \\ a_1q^2\left(1 + q^3 - q^2\right) & = 20 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania mamy

$$1 + q^3 - q^2 = \frac{10}{a_1q} \tag{4.11}$$

($a_1q \neq 0$, bo gdyby którykolwiek z czynników był zerem, to natychmiast z pierwszego równania otrzymalibyśmy sprzeczność $0 = 10$). Podstawiając do drugiego równania dostajemy

$$a_1q^2 \cdot \frac{10}{a_1q} = 20,$$

czyli

$$10q = 20,$$

a więc

$$q = 2.$$

Podstawiając tak otrzymane q do (4.11) mamy

$$1 + 8 - 4 = \frac{5}{a_1}.$$

Zatem

$$a_1 = 1.$$

Ostatecznie warunki (4.10) spełnia ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = 2$.

4.5 Sumy częściowe ciągów

Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem.

Definicja 4.29 *Ciąg (S_n) zdefiniowany wzorem*

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

lub rekurencyjnie wzorami

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \end{cases}$$

nazywamy ciągiem sum częściowych ciągu (a_n). Jego n-ty wyraz S_n nazywamy n-tą sumą częściową.

W przypadku niektórych ciągów dysponujemy wygodnymi wzorami na n-tą sumę częściową. Do takich przypadków należą ciągi arytmetyczne i geometryczne.

Twierdzenie 4.30 *Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to jego n-ta suma częściowa wyraża się wzorem*

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \tag{4.12}$$

Twierdzenie 4.31 *Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to jego n-ta suma częściowa wyraża się wzorem*

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & dla\ q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & dla\ q = 1 \end{cases} . \tag{4.13}$$

Przykład 4.32 *a) Obliczymy sumę wszystkich liczb naturalnych nieparzystych niewiększych od 451. Zauważmy, że liczby naturalne nieparzyste tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 1 i różnicy 2. Suma, którą chcemy obliczyć jest 226-tą sumą częściową tego ciągu. Zatem zgodnie z wzorem (4.12) mamy*

$$S_{226} = \frac{1 + 451}{2} \cdot 226 = 226^2 = 51076.$$

b) Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym. Obliczymy 6-tą sumę częściową tego ciągu wiedząc, że

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 26 \\ a_2 \cdot a_4 = 160 \end{cases} .$$

Na mocy Twierdzenia 4.27 układ powyższy możemy zapisać w postaci

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 4r = 26 \\ (a_1 + r)(a_1 + 3r) = 160 \end{cases}$$

lub równoważnie

$$\begin{cases} a_1 = 13 - 2r \\ (13 - r)(13 + r) = 160 \end{cases} .$$

Z drugiego równania mamy

$$169 - r^2 = 160$$

$$r^2 = 9$$

$$r = 3 \quad \vee \quad r = -3.$$

Wstawiając do pierwszego równania dostajemy odpowiednio

$$a_1 = 7,\ gdy\ r = 3,$$

$$a_1 = 19,\ gdy\ r = -3.$$

Są więc dwa ciągi arytmetyczne spełniające zadane warunki. Pierwszy z tych ciągów oznaczmy przez (a_n)*, zaś drugi przez* $(\overline{a_n})$*. Do obliczenia* 6*-tej sumy częściowej musimy obliczyć* a_6*:*

$$a_6 = 7 + 5 \cdot 3 = 22$$

$$\overline{a_6} = 19 + 5 \cdot (-3) = 4.$$

Ostatecznie 6*-ta suma częściowa wynosi*

$$S_6 = \frac{7+22}{2} \cdot 6 = 87$$

lub

$$\overline{S_6} = \frac{19+4}{2} \cdot 6 = 69.$$

c) Dla ciągu geometrycznego (a_n) *o ilorazie* $q = -\frac{1}{2}$ *obliczymy sumę pierwszych sześciu wyrazów, wiedząc, że* $a_1 = \frac{1}{2}$*. Skorzystamy bezpośrednio z (4.13), przy czym użyjemy pierwszego wzoru, bo* $q \neq 1$*. Mamy więc*

$$S_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{63}{64} = \frac{21}{64}.$$

d) Niech (a_n) *będzie ciągiem geometrycznym. Znajdziemy dla tego ciągu* a_1 *oraz iloraz* q*, wiedząc, że*

$$\begin{cases} a_1 - a_4 = 31,5 \\ S_3 = 10,5 \end{cases}$$

Korzystając z (4.13) oraz z Twierdzenia 4.27 otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a_1 - a_1 \cdot q^3 & = 31,5 \\ a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} & = 10,5 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania wyznaczamy

$$a_1 = \frac{31,5}{1-q^3}, \tag{4.14}$$

przy czym zauważamy, że $1 - q^3 \neq 0$*, bo gdyby było zerem, to* q *byłoby jedynką i ciąg byłby staly, więc warunek* $a_1 - a_4 = 31,5$ *byłby niemożliwy. Podstawiając wyliczone* a_1 *do drugiego równania dostajemy*

$$\frac{31,5}{1-q} = 10,5$$

$$1 - q = 3$$

$$q = -2.$$

Podstawiając otrzymane q *do równania (4.14) dostajemy*

$$a_1 = \frac{31,5}{1-8} = -4,5.$$

4.6 Suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego

Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym. Ze względu na wzór na n-ty wyraz tego ciągu widzimy, że aby obliczyć granicę tego ciągu wystarczy wiedzieć ile wynosi granica ciągu (q^n). Zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 4.33

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \textit{, gdy } |q| < 1 \\ 1 & \textit{, gdy } q = 1 \\ \infty & \textit{, gdy } q > 1 \\ \textit{nie istnieje} & \textit{, gdy } q \leqslant -1 \end{cases}.$$

Widać więc, że ciąg (q^n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $q \in (-1; 1\rangle$. Ponadto widać, że jeżeli $q \in (-1; 1)$, to ciąg geometryczny $\left(a_1 q^{n-1}\right)$ jest zbieżny do zera, jeśli zaś $q = 1$, to ciąg geometryczny $\left(a_1 q^{n-1}\right)$ jest stały i jego granica wynosi a_1.

Zdefiniujemy teraz sumę wszystkich wyrazów ciągu nieskończonego.

Definicja 4.34 *Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem. Sumą wszystkich jego wyrazów będziemy nazywali granicę*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

gdzie (S_n) jest ciągiem sum częściowych ciągu (a_n), o ile ta granica istnieje i jest skończona.

Okazuje się, że w przypadku ciągu geometrycznego dokładnie wiadomo kiedy taką sumę da się obliczyć i jakim się ona wyraża wzorem. Wynika to wprost z Twierdzenia 4.33, gdyż jedynym zmiennym składnikiem prawej strony wzoru na n-tą sumę częściową ciągu geometrycznego jest q^n, a o granicy takiego właśnie ciągu mówi Twierdzenie 4.33.

Twierdzenie 4.35 *Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$. Jeżeli ten warunek jest spełniony, to suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem*

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Przykład 4.36 *a) Znajdziemy sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego*

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, 1, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \ldots\right).$$

Iloraz tego ciągu geometrycznego wynosi

$$q = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} : 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

Zauważmy, że $\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right| < 1$. *Zatem na mocy Twierdzenia 4.35 istnieje suma wszystkich wyrazów danego ciągu i wynosi ona*

$$\begin{aligned} S &= \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{4} \\ &= \frac{6\sqrt{3}+10}{4} = \frac{3\sqrt{3}+5}{2}. \end{aligned}$$

b) Wyznaczymy ciąg geometryczny (a_n), *wiedząc, że*

$$\begin{cases} S_4 = 33\frac{3}{4} \\ S = 36 \end{cases}.$$

Oczywiście ponieważ z założenia istnieje suma wszystkich wyrazów naszego ciągu, więc z Twierdzenia 4.35 wiemy, że $q \in (-1;1)$. *Korzystając z wzorów na sumę częściową i sumę wszystkich wyrazów dostajemy układ równań*

$$\begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 33\frac{3}{4} \\ \frac{a_1}{1-q} = 36 \end{cases}.$$

Podstawiając z drugiego równania wyrażenie $\frac{a_1}{1-q}$ *do pierwszego otrzymujemy równanie*

$$36 \cdot \left(1-q^4\right) = 33\frac{3}{4},$$

skąd

$$1-q^4 = \frac{135}{4}\cdot\frac{1}{36}$$

$$q^4 = 1-\frac{135}{144} = \frac{9}{144} = \frac{1}{16}.$$

Stąd

$$q = \frac{1}{2} \quad \vee \quad q = -\frac{1}{2}.$$

W konsekwencji dla $q = \frac{1}{2}$ *mamy*

$$a_1 = 36 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right) = 18,$$

zaś dla $q = -\frac{1}{2}$ *mamy*

$$a_1 = 36\left(1+\frac{1}{2}\right) = 54.$$

Otrzymaliśmy więc dwa ciągi spełniające warunki zadania:

$$\left(18, 9, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \frac{9}{8}, ...\right),$$

$$\left(54, -27, \frac{27}{2}, -\frac{27}{4}, \frac{27}{8}, ...\right).$$

c) Rozwiążemy równanie

$$3^x + 3^{2x} + 3^{3x} + ... + 3^{nx} + ... = \frac{1}{2}.$$

Zauważmy, że lewa strona naszego równania jest sumą wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 3^x$ *i ilorazie*

$$q = \frac{3^{(n+1)x}}{3^{nx}} = 3^x.$$

Aby móc mówić o sumie wszystkich wyrazów tego ciągu, zgodnie z Twierdzeniem 4.35, musimy zastrzec, by

$$|3^x| < 1$$

$$-1 < 3^x < 1$$

i ponieważ pierwsza z tych nierówności jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, *więc pozostaje rozwiązać nierówność*

$$3^x < 1.$$

Stąd $x < 0$ *i za pomocą tej nierówności mamy określoną dziedzinę* D *naszego równania. Korzystając teraz ze wzoru na sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego, z treści zadania dostajemy równanie*

$$\frac{3^x}{1 - 3^x} = \frac{1}{2}.$$

Przekształcając to równanie otrzymujemy kolejno

$$2 \cdot 3^x = 1 - 3^x$$

$$3 \cdot 3^x = 1$$

$$3^{x+1} = 3^0.$$

Z różnowartościowości funkcji wykładniczej mamy

$$x + 1 = 0,$$

czyli

$$x = -1 \in D.$$

Zatem nasze równanie ma dokładnie jeden pierwiastek $x = -1$.

4.7 Indukcja matematyczna

Zachodzi następujące twierdzenie zwane *twierdzeniem o indukcji zupełnej*:

Twierdzenie 4.37 *Niech $T(n)$ będzie formą zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Załóżmy, że spełnione są następujące dwa warunki*

1. *Zdanie $T(1)$ jest prawdziwe;*
2. *Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Longrightarrow T(n+1)$.*

Wówczas dla każdej liczby naturalnej n zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.

W założeniu 2. powyższego twierdzenia zdanie $T(n)$ bywa nazywane *założeniem indukcyjnym*, zaś $T(n+1)$ — *tezą indukcyjną.*

Czasami podstawianie do formy zdaniowej T pierwszych liczb naturalnych $1, 2, 3, ...$ daje zdanie fałszywe, dopiero któraś z kolei liczba naturalna spełnia tę formę. W związku z tym mamy następującą wersję powyższego twierdzenia

Twierdzenie 4.38 *Niech $T(n)$ będzie formą zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Załóżmy, że spełnione są następujące dwa warunki*

1. *Zdanie $T(k_0)$ jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej k_0;*
2. *Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \geqslant k_0$ prawdziwa jest implikacja*
$$T(n) \Longrightarrow T(n+1).$$

Wówczas dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant k_0$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.

Powyższych twierdzeń używamy do dowodzenia wielu twierdzeń mówiących o liczbach naturalnych.

Przykład 4.39 *a) Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość*
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
Formą zdaniową $T(n)$ w naszym przykładzie jest właśnie powyższa równość. Sprawdzimy, czy podstawienie do tej formy w miejsce n jedynki daje zdanie prawdziwe. Obliczymy lewą stronę i prawą stronę naszej równości dla $n = 1$:
$$L_1 = 1^2 = 1,$$
$$P_1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1.$$
Zatem $L_1 = P_1$, czyli zdanie $T(1)$ jest prawdziwe i spełnione jest założenie 1. Twierdzenia 4.37. Sprawdzimy teraz, czy spełnione jest założenie 2. tego twierdzenia. Weźmy dowolną liczbę naturalną n. Mamy pokazać, prawdziwość pewnej implikacji. ponieważ implikacja jest zawsze prawdziwa, gdy ma fałszywy

poprzednik, więc możemy od razu założyć, że zdanie $T(n)$ jest prawdziwe, czyli zakładamy prawdziwość założenia indukcyjnego

$$Z: 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aby implikacja o prawdziwym poprzedniku była prawdziwa, musi mieć prawdziwy następnik, a więc wykorzystując założenie indukcyjne musimy pokazać prawdziwość tezy indukcyjnej:

$$T: 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

(to jest nasze zdanie $T(n+1)$). Dla udowodnienia prawdziwości tezy indukcyjnej weźmiemy jej lewą stronę i będziemy przekształcać dotąd aż dojdziemy do prawej strony. Miejsce, w którym skorzystamy z założenia indukcyjnego zaznaczymy literą Z nad znakiem równości

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 \stackrel{Z}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6}\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right] = \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right) \\ &= \frac{n+1}{6} \cdot 2\left(n + \frac{3}{2}\right)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = P_{n+1}, \end{aligned}$$

gdzie w końcowych przekształceniach wykorzystaliśmy postać iloczynową trójmianu. Zatem przy założeniu, że prawdziwe jest zdanie $T(n)$ otrzymaliśmy prawdziwość zdania $T(n+1)$, więc spełnione jest założenie 2. Twierdzenia 4.37. Ponieważ spełnine są założenia tego twierdzenia, więc możemy z niego skorzystać. Na mocy Twierdzenia 4.37 zdanie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n, czyli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest równość

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b) Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na,$$

gdzie $a > -1$. Nierówność tę w literaturze nazywa się nierównością Bernoullego. Nasza forma zdaniowa $T(n)$ ma teraz postać powyższej nierówności. Sprawdzimy, czy podstawienie jedynki w miejsce n do tej formy zdaniowej daje zdanie prawdziwe.

$$L_1 = (1+a)^1 = 1 + a,$$
$$P_1 = 1 + 1 \cdot a = 1 + a.$$

Zatem $L_1 \geqslant P_1$, czyli zdanie $T(1)$ jest prawdziwe — spełnione jest założenie 1. Twierdzenia 4.37. Weźmy dowolną liczbę naturalną n i załóżmy, że zdanie $T(n)$ jest prawdziwe

$$Z: (1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

Wykażemy, że prawdziwe jest przy powyższym założeniu zdanie $T(n+1)$, czyli teza indukcyjna

$$T : (1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)\,a.$$

Zacznijmy od lewej strony:

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= (1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a) \overset{Z}{\geqslant} (1+na)(1+a) \\ &= 1 + na + a + na^2 \geqslant 1 + na + a = 1 + (n+1)\,a = P_{n+1}, \end{aligned}$$

gdzie nierówność $(1+a)^n (1+a) \geqslant (1+na)(1+a)$ uzyskaliśmy mnożąc stronami prawdziwą, na mocy założenia indukcyjnego, nierówność $(1+a)^n \geqslant 1+na$ przez dodatnie wyrażenie $1+a$ (w warunkach zadania było założenie, że $a > -1$), zaś nierówność $1+na+a+na^2 \geqslant 1+na+a$ uzyskaliśmy dodając do obu stron prawdziwej nierówności $na^2 \geqslant 0$ wyrażenie $1+na+a$. W konsekwencji teza indukcyjna jest prawdziwa przy założeniu prawdziwości założenia indukcyjnego. Spełnione jest więc założenie 2. Twierdzenia 4.37. Na mocy tego twierdzenia dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe jest zdanie $T(n)$, czyli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność Bernoulli'ego.

c) Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9. Zauważmy, że podana podzielność oznacza, że

$$\bigvee_{k_n \in \mathbb{Z}} 4^n + 15n - 1 = 9k_n.$$

Zatem ta właśnie formuła jest naszą formą zdaniową $T(n)$. Sprawdzamy prawdziwośc zdania $T(1)$, czyli pytamy, czy istnieje liczba całkowita k_1 taka, że

$$4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 9k_1. \tag{4.15}$$

Ponieważ lewa strona ostatniej równości wynosi 18, więc widać natychmiast, że wystarczy położyć $k_1 = 2$, aby powyższa równość była prawdziwa. Zatem istnieje całkowite k_1 takie, że zachodzi równość (4.15), czyli forma $T(n)$ spełnia założenie 1. Twierdzenia 4.37. Weźmy teraz dowolną liczbę naturalną n i załóżmy, że prawdziwe jest zdanie $T(n)$, czyli

$$Z : \bigvee_{k_n \in \mathbb{Z}} 4^n + 15n - 1 = 9k_n.$$

Pokażemy, że prawdziwe jest zdanie $T(n+1)$, czyli

$$T : \bigvee_{k_{n+1} \in \mathbb{Z}} 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 9k_{n+1}.$$

Rozważmy lewą stronę równości

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \cdot 4^n + 15n + 14 \\ &= 4 \cdot 4^n + 4 \cdot (15n-1) - 4 \cdot (15n-1) + 15n + 14 \\ &= 4 \cdot (4^n + 15n - 1) - 45n + 18. \end{aligned}$$

Zauważmy, że wyrażenie występujące w nawiasie pokrywa się z lewą stroną równości występującej w założeniu indukcyjnym. Ponieważ zakładamy, że założenie indukcyjne jest prawdziwe, więc na mocy tego założenia istnieje liczba całkowita k_n *taka, że* $4^n + 15n - 1 = 9k_n$. *Zatem mamy dalej na mocy założenia indukcyjnego*

$$L_{n+1} = 4 \cdot 9k_n - 45n + 18 = 9\,(4k_n - 5n + 2)\,.$$

Zauważmy, że $4k_n - 5n + 2 \in \mathbb{Z}$, *bo* $k_n \in \mathbb{Z}$ *i* $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. *W konsekwencji, definiując* k_{n+1} *jako równe* $4k_n - 5n + 2$, *otrzymujemy, że istnieje liczba całkowita* k_{n+1} *taka, że* $4^{n+1} + 15\,(n+1) - 1 = 9k_{n+1}$. *Spełnione są więc założenia Twierdzenia 4.37. Na mocy tego twierdzenia prawdziwe jest zdanie*

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{k_n \in \mathbb{Z}} 4^n + 15n - 1 = 9k_n,$$

czyli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ *liczba* $4^n + 15n - 1$ *jest podzielna przez* 9.

d) Używając twierdzenia o indukcji zupełnej wykażemy wzór na n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego. Pokażemy więc, że jeżeli* (a_n) *jest ciągiem arytmetycznym o różnicy* r, *to dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi równość*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

Sprawdzamy prawdziwość tego wzoru dla $n = 1$*:*

$$\begin{aligned} L_1 &= a_1, \\ P_1 &= a_1 + (1-1) \cdot r = a_1. \end{aligned}$$

Zatem $L_1 = P_1$, *czyli wzór jest prawdziwy dla* $n = 1$ *i spełnione jest założenie 1. Twierdzenia 4.37. Weźmy dowolną liczbę naturalną* n *i załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla* n, *tzn. prawdziwe jest zdanie*

$$Z : a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

Pokażemy prawdziwość tezy indukcyjnej

$$T : a_{n+1} = a_1 + nr.$$

Weźmy lewą stronę tezy. Na mocy definicji ciągu arytmetycznego mamy

$$\begin{aligned} L_{n+1} = a_{n+1} = a_n + r &\overset{Z}{=} a_1 + (n-1) \cdot r + r \\ &= a_1 + (n - 1 + 1) \cdot r = a_1 + nr = P_{n+1}. \end{aligned}$$

Zatem teza indukcyjna jest prawdziwa i spełnione jest założenia 2. Twierdzenia 4.37. Na mocy tego twierdzenia dla każdego $n \in \mathbb{N}$ *prawdziwa jest równość*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

e) Używając twierdzenia o indukcji zupełnej wykażemy wzór na n*-tą sumę częściową ciągu geometrycznego o ilorazie* $q \neq 1$. *Pokażemy więc, że jeżeli* (a_n)

jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q \neq 1$, *a* (S_n) *jest ciągiem jego sum częściowych, to dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi równość*

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Sprawdzamy prawdziwość tego wzoru dla $n = 1$*:*

$$L_1 = S_1 = a_1,$$
$$P_1 = a_1 \frac{1-q^1}{1-q} = a_1.$$

Zatem $L_1 = P_1$, *czyli wzór jest prawdziwy dla* $n = 1$ *i spełnione jest założenie 1. Twierdzenia 4.37. Weźmy dowolną liczbę naturalną* n *i załóżmy, że prawdziwe jest zdanie*

$$Z : S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Pokażemy prawdziwość tezy indukcyjnej

$$T : S_{n+1} = a_1 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Weźmy prawą stronę tezy. Na mocy wzoru na n*-ty wyraz ciągu geometrycznego i rekurencyjnego wzoru opisującego ciąg sum częściowych mamy*

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= a_1 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = a_1 \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} \\ &= a_1 \frac{1-q^n}{1-q} + a_1 \frac{q^n(1-q)}{1-q} \overset{Z}{=} S_n + a_1 \cdot q^n \\ &= S_n + a_{n+1} = S_{n+1} = L_{n+1}. \end{aligned}$$

Zatem teza indukcyjna jest prawdziwa i spełnione jest założenie 2. Twierdzenia 4.37. Na nocy tego twierdzenia dla każdego $n \in \mathbb{N}$ *prawdziwa jest równość*

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Rozdział 5

Granica i ciągłość funkcji

5.1 Pojęcie granicy funkcji

Poznaliśmy już pojęcie granicy nieskończonego ciągu liczbowego. Ciąg taki, jak wiemy, jest funkcją specyficzną — jej dziedziną jest zbiór liczb naturalnych. Tym razem chcemy mówić o granicy w odniesieniu do funkcji określonej na dowolnym podzbiorze zbioru liczb rzeczywistych, której wartości będą także liczbami rzeczywistymi. Zatem będziemy zajmować się granicą funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej.

Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją i niech x_0 oznacza pewną liczbę, a więc jakiś punkt na osi liczbowej. Załóżmy, że każde sąsiedztwo $S(x_0)$ liczby x_0 zawiera punkty zbioru D_f.

Definicja 5.1 *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą (odpowiednio niewłaściwą) równą liczbie g (odpowiednio $\pm\infty$), gdy dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji f zbieżnego do x_0, o wyrazach różnych od x_0, odpowiadający mu ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji dąży do g (odpowiednio do $\pm\infty$). Piszemy wówczas $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ (odpowiednio $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$).*

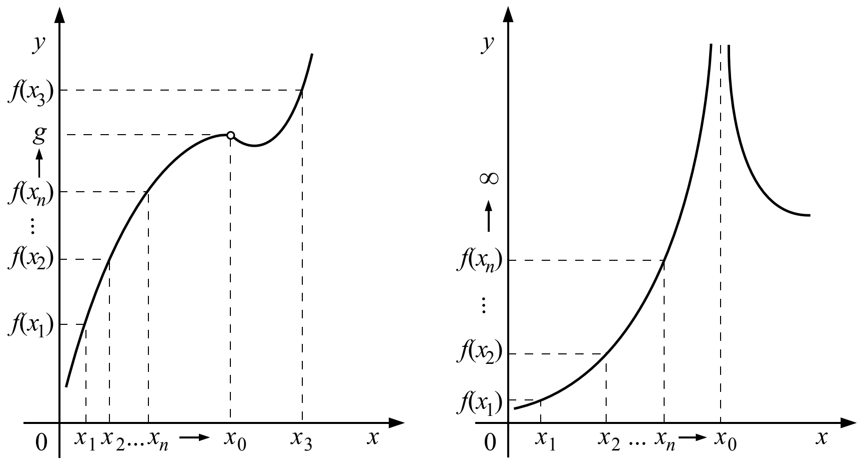
Zgodnie z powyższą definicją, dla udowodnienia nieistnienia granicy funkcji f w punkcie x_0 można wybrać z dziedziny dwa ciągi (x_n'), (x_n'') zbieżne do x_0 i takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$, albo jedna z tych granic istnieje, a druga nie.

Na rysunku (Rys. 5.1) przedstawiamy ilustrację powyższej definicji.

Zauważmy, że z założenia uczynionego przed definicją granicy funkcji wynika, że x_0 jest granicą przynajmniej jednego ciągu argumentów o wyrazach różnych od x_0. Zauważmy dalej, że w przypadku, gdy dziedzina funkcji f zawiera jakieś sąsiedztwo punktu x_0, to oczywiściwe spełnione jest założenie uczynione przed definicją granicy.

Przykład 5.2 *Korzystając z definicji wykażemy, że funkcja dana wzorem*

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1}$$



Granica właściwa w punkcie x_0 — Granica niewłaściwa $+\infty$ w punkcie x_0

Rys. 5.1

ma w punkcie $x_0 = 2$ *granicę równą* 1*. Dziedziną funkcji* f *jest zbiór* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$*, więc, jak łatwo widać, sąsiedztwo* $(1;2) \cup (2;3)$ *liczby* $x_0 = 2$ *jest zawarte w dziedzinie naszej funkcji. Niech* (x_n) *będzie dowolnym ciągiem argumentów funkcji* f *takim, że* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$*, przy czym dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *mamy* $x_n \neq 2$*. Zgodnie z definicją obliczymy teraz granicę ciągu odpowiednich wartości funkcji. Korzystając z poznanych twierdzeń o granicach ciągów otrzymujemy*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n - 1}{x_n^2 - 1} = \frac{3}{3} = 1.$$

Z dowolności wyboru ciągu (x_n) *wnioskujemy, że* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x-1}{x^2-1} = 1$*.*

Warto podkreślić, że funkcja f może nie być określona w punkcie x_0, w którym badamy istnienie granicy. Jeśli jednak f jest określona w x_0, to wartość funkcji w tym punkcie nie ma wpływu na jej granicę w punkcie x_0.

Przykład 5.3 *Obliczymy z definicji granicę funkcji* f *danej wzorem* $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ *w punkcie* $x_0 = 1$*. Dziedziną funkcji* f *jest zbiór* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$*. Widać, że dziedzina zawiera pewne sąsiedztwo (np.* $(0;1) \cup (1;2)$*) punktu* x_0*. Niech* (x_n) *będzie dowolnym ciągiem argumentów funkcji* f *takim, że* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$*. Otrzymujemy*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{x_n - 1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + 1) = 2.$$

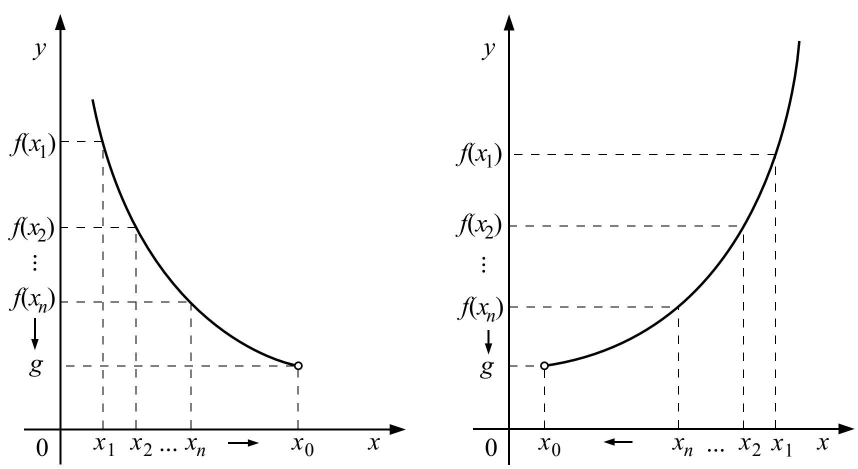
Zatem $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$*. Gdybyśmy dodefiniowali (w dowolny sposób) funkcję* f *w punkcie* $x_0 = 1$*, to granica tej funkcji w punkcie* $x_0 = 1$ *pozostanie bez zmian.*

Granica funkcji w punkcie zależy nie od wartości funkcji w tym punkcie, lecz od zachowania się funkcji "blisko" rozważanego punktu.

Załóżmy teraz, że każde sąsiedztwo lewostronne $S^-(x_0)$(odpowiednio prawostronne $S^+(x_0)$) punktu x_0 zawiera punkty dziedziny D_f.

Definicja 5.4 *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą lewostronną (odpowiednio prawostronną) równą liczbie rzeczywistej g, gdy dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji f zbieżnego do x_0, o wyrazach mniejszych (odpowiednio większych) od x_0, odpowiadający mu ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji jest zbieżny do g. Piszemy wówczas $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = g$ (odpowiednio $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$).*

Na rysunku zilustrujemy granicę właściwą lewostronną i prawostronną



Rys. 5.2

Przykład 5.5 *a) Pokażemy, że funkcja może nie mieć nawet granicy jednostronnej. Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dziedzina zawiera każde sąsiedztwo prawostronne punktu 0, jest więc sens mówić o granicy prawostronnej w 0. Pokażemy, że ta granica nie istnieje. Niech $(x_n'), (x_n'')$ będą ciągami zdefiniowanymi następująco*

$$x_n' = \frac{1}{2n\pi},\ x_n'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \quad \textit{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Mamy $x_n' > 0$ i $x_n'' > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 0$.

Obliczając granice odpowiednich ciągów wartości funkcji f, dostajemy

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=\lim_{n\to\infty}0=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n''}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n'')$, czyli nie istnieje granica prawostronna funkcji f w punkcie $x_0=0$. W analogiczny sposób można pokazać, że nie istnieje także granica lewostronna tej funkcji w $x_0=0$.

b) Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x)=x-\frac{x}{|x|}$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Oczywiście każde sąsiedztwo (sąsiedztwo lewostronne, prawostronne) punktu $x_0=0$ zawiera się w dziedzinie funkcji f. Możemy zatem obliczać w tym punkcie zarówno obie granice jednostronne, jak i granicę naszej funkcji. Zacznijmy od granicy lewostronnej. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem argumentów mniejszych od zera, dążącym do 0. Ponieważ $x_n<0$, więc $|x_n|=-x_n$ i obliczając granicę ciągu wartości otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(x_n-\frac{x_n}{|x_n|}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(x_n+\frac{x_n}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}(x_n+1)=1.$$

Na mocy definicji granicy lewostronnej mamy więc

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=1.$$

Weźmy teraz dowolny ciąg (x_n) argumentów dodatnich, dążący do 0. Ponieważ $x_n>0$, więc $|x_n|=x_n$ i obliczając granicę ciągu wartości mamy

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(x_n-\frac{x_n}{|x_n|}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(x_n-\frac{x_n}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=-1.$$

Na mocy definicji granicy prawostronnej otrzymujemy więc

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-1.$$

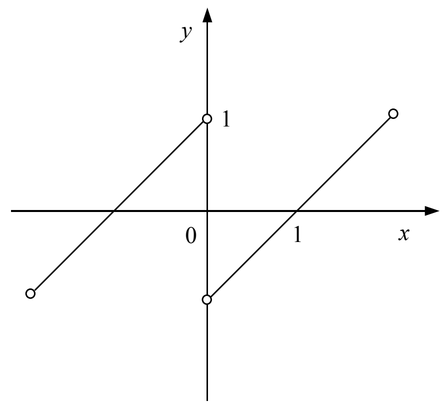
Zauważmy dodatkowo, że funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0=0$. Istotnie, jeśli zdefiniujemy $x_n=-\frac{1}{n}$, to $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $x_n\neq0$ dla $n\in\mathbb{N}$ i

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}-\frac{-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}+1\right)=1,$$

zaś jeśli zdefiniujemy $x_n'=\frac{1}{n}$, to $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=0$, $x_n'\neq0$ i

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)=-1.$$

Wskazaliśmy więc dwa ciągi argumentów spełniające żadane warunki takie, że odpowiadające im ciągi wartości dążą do różnych granic. Zatem funkcja f nie posiada granicy w punkcie $x_0=0$. Narysujmy wykres funkcji f



Rys. 5.3

W związku z powyższym przykładem mamy następujące

Twierdzenie 5.6 *Jeżeli każde lewostronne i prawostronne sąsiedztwo punktu x_0 zawiera punkty dziedziny D_f funkcji f, to granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ istnieje i ma wartość $g \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją jednocześnie granice jednostronne*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \textit{oraz} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

i obie mają wartość g.

Przykład 5.7 *Niech $f(x) = \frac{1}{x}$. Funkcja f jest określona dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pokażemy, że nie istnieje granica funkcji f w punkcie $x_0 = 0$. Zauważmy najpierw, że istnieje sąsiedztwo $S(0)$ (np. $(-1;0) \cup (0;1)$) punktu 0, które zawiera się w dziedzinie funkcji f. Jest więc sens mówić o granicy tej funkcji w 0. Niech (x_n') będzie dowolnym ciągiem o wyrazach ujemnych, dążącym do 0. Wówczas*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n') = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n'} = -\infty$$

na mocy Twierdzenia 4.19. Zatem $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$. Podobnie, weźmy dowolny ciąg (x_n'') o wyrazach dodatnich, dążący do 0. Wówczas

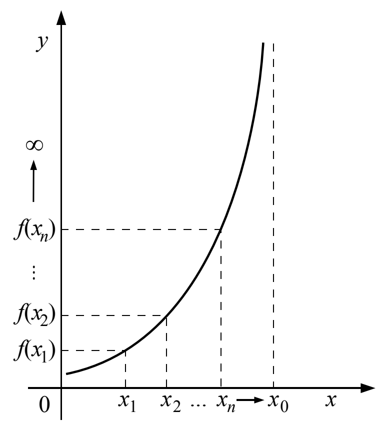
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n'') = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n''} = +\infty.$$

Zatem $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Widać więc, że $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Na mocy Twierdzenia 5.6 nie istnieje granica funkcji f w punkcie 0.

W dalszym ciągu zakładamy, że każde sąsiedztwo lewostronne $S^-(x_0)$ (odpowiednio prawostronne $S^+(x_0)$) punktu x_0 zawiera punkty dziedziny D_f.

Definicja 5.8 *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą lewostronną (odpowiednio prawostronną) równą $\pm\infty$, gdy dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji f zbieżnego do x_0, o wyrazach mniejszych (odpowiednio większych) od x_0, odpowiadający mu ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji jest rozbieżny do $\pm\infty$. Piszemy wóczas $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ (odpowiednio $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$).*

Definicję niewłaściwej granicy lewostronnej w x_0 zilustrujemy na rysunku



Rys. 5.4

Załóżmy teraz, że każde sąsiedztwo $+\infty$ (odpowiednio $-\infty$) zawiera punkty dziedziny D_f funkcji f.

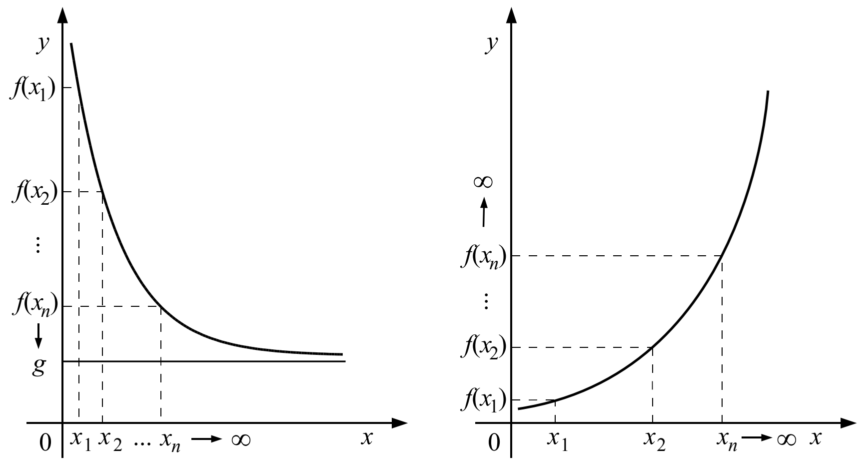
Definicja 5.9 *Mówimy, że funkcja f ma w $+\infty$ (odpowiednio $-\infty$) granicę g (właściwą lub niewłasciwą), gdy dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji f rozbieżnego do $+\infty$ (odpowiednio $-\infty$), odpowiadający mu ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji dąży do g. Piszemy wówczas $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = g$ (odpowiednio $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$).*

Na rysunku (Rys. 5.5) przedstawiamy przypadek właściwej granicy w $+\infty$ i przypadek niewłaściwej granicy w $+\infty$

Przykład 5.10 *a) Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x) = \frac{x^2+1}{1-x^2}$. Dziedziną funkcji f jest $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Zatem dziedzina ta zawiera pewne sąsiedztwo punktu $-\infty$ (np. przedział $(-\infty; -1)$). Jest więc sens mówić o granicy funkcji f w $-\infty$. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem argumentów dążącym do $-\infty$. Obliczmy granicę ciągu wartości*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+1}{1-x_n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x_n^2}}{\frac{1}{x_n^2}-1} = -1.$$

W konsekwencji mamy $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{1-x^2} = -1$.



Rys. 5.5

b) Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. Dziedziną funkcji f jest $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zatem dziedzina ta zawiera pewne sąsiedztwo $+\infty$ (np. przedział $(1;\infty)$). Jest więc sens mówić o granicy funkcji f w $+\infty$. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem argumentów dążącym do $+\infty$. Obliczmy granice ciągu wartości

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+1}{x_n-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + \frac{1}{x_n}}{1 - \frac{1}{x_n}} = +\infty.$$

W kosekwencji mamy $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty$.

c) Niech $f(x) = \sin x$. Oczywiście funkcja f jest określona dla wszyskich x rzeczywistych. Pokażemy, że funkcja ta nie ma granicy w $+\infty$. Niech $(x_n'), (x_n'')$ będą ciągami zdefiniowanymi następująco

$$x_n' = 2n\pi \ , \ x_n'' = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \ \textit{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Mamy wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = +\infty$. Korzystając z własności funkcji sinus otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} \sin x_n' = \lim_{n\to\infty} \sin 2n\pi = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim_{n\to\infty} \sin x_n'' = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$, czyli nie istnieje granica funkcji f w $+\infty$. W analogiczny sposób można pokazać, że f nie ma granicy w $-\infty$.

Definicje granicy funkcji zaprezentowane powyżej pochodzą od E. Heinego. Wykorzystuje się w nich pojęcie granicy ciągu liczbowego. Granicę (także granice jednostronne) funkcji w x_0 można zdefiniować w sposób równoważny bez potrzeby używania pojęcia granicy ciągu. Takie podejście zaprezentował A. C. Cauchy. Dla przykładu sformułujmy definicję Cauchy'ego granicy właściwej funkcji f w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$.

Załóżmy, jak przed definicją Heinego, że każde sąsiedztwo punktu x_0 zawiera punkty dziedziny D_f funkcji f.

Definicja 5.11 *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ granicę $g \in \mathbb{R}$, gdy dla dowolnego otoczenia $U(g)$ punktu g, istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ punktu x_0 takie, że jeżeli $x \in S(x_0) \cap D_f$, to $f(x) \in U(g)$.*

Zachodzi następujące

Twierdzenie 5.12 *Jeżeli istnieje granica właściwa lub niewłaściwa funkcji f w x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$ lub $x_0 = \pm\infty$), to ma ona jednoznacznie określoną wartość.*

Twierdzenie to dotyczy także granic jednostronnych.

5.2 Obliczanie granic

Działania arytmetyczne na granicach wykonujemy zgodnie z następującymi naturalnymi regułami, analogicznymi do reguł znanych już dla ciągów.

Twierdzenie 5.13 *Załóżmy, że istnieją granice właściwe $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = g_1$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = g_2$, to*

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} [f_1(x) \pm f_2(x)] = g_1 \pm g_2$,

(b) $\lim\limits_{x\to x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = g_1 \cdot g_2$,

(c) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_1}{g_2}$, *o ile* $g_2 \neq 0$,

(d) $\lim_{x\to x_0} (f_1(x))^{f_2(x)} = (g_1)^{g_2}$, *o ile g_1, g_2 nie są równocześnie zerami.*

Powyższe równości pozostają prawdziwe dla granic jednostronnych oraz granic w punktach nieskończonych $\pm\infty$. Co więcej, mogą one być rozszerzone na przypadki, gdy jedna lub obie granice funkcji f_1, f_2 są niewłaściwe, jak również, gdy $g_2 = 0$. Twierdzenia opisujące uogólnione działania arytmetyczne na granicach funkcji zapiszemy skrótowo za pomocą nawiasów kwadratowych, aby zaznaczyć umowny sens zachodzących równości (podobnie, jak to zrobiliśmy dla ciągów):

$$[g_1 \pm \infty] = \pm\infty, \text{ gdy } g_1 \in \mathbb{R} \qquad [+\infty + \infty] = +\infty$$
$$[-\infty - \infty] = -\infty$$
$$[g_1 \cdot \pm\infty] = \begin{cases} \pm\infty & \text{, dla } g_1 \in (0; +\infty) \\ \mp\infty & \text{, dla } g_1 \in (-\infty; 0) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} [(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)] = +\infty \\ [(\pm\infty)\cdot(\mp\infty)] = -\infty \end{array}$$
$$\left[\frac{g_1}{\pm\infty}\right] = 0, \text{ gdy } g_1 \in \mathbb{R}$$
$$\left[\frac{g_1}{0^+}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{, dla } g_1 \in (0; +\infty) \\ -\infty & \text{, dla } g_1 \in (-\infty; 0) \end{cases} \qquad \left[\frac{g_1}{0^-}\right] = \begin{cases} -\infty & \text{, dla } g_1 \in (0; +\infty) \\ +\infty & \text{, dla } g_1 \in (-\infty; 0) \end{cases}$$
$$\left[\frac{\pm\infty}{0^+}\right] = \pm\infty \qquad \left[\frac{\pm\infty}{0^-}\right] = \mp\infty$$
$$\left[(g_1)^{+\infty}\right] = 0, \text{ gdy } g_1 \in (0; 1) \qquad \left[(g_1)^{+\infty}\right] = +\infty, \text{ gdy } g_1 \in (1; +\infty)$$
$$\left[(g_1)^{-\infty}\right] = +\infty, \text{ gdy } g_1 \in (0; 1) \qquad \left[(g_1)^{-\infty}\right] = 0, \text{ gdy } g_1 \in (1; +\infty).$$

Symbole 0^+ i 0^- oznaczają, że $g_2 = 0$ oraz odpowiednio $f_2(x) > 0$ lub $f_2(x) < 0$ na części wspólnej dziedziny funkcji f i pewnego sąsiedztwa (sąsiedztwa jednostronnego dla granic jednostronnych) punktu x_0. Pamiętajmy, że jeżeli w powyższych regułach występuje więcej niż jeden znak typu $\pm\infty$ lub $\mp\infty$, to zawsze czytamy tylko albo górne znaki $+, -$, albo tylko dolne. Zebrane tu reguły działań arytmetycznych na granicach funkcji nie obejmują tych przypadków, gdy na istnienie i wartość granicy istotny wpływ ma "szybkość" zmian wartości funkcji f_1 i f_2, gdy x dąży do x_0.

Przykład 5.14 *Rozważmy funkcje f_1, f_2, f_3 zadane wzorami*

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2}\ ,\ f_2(x) = \frac{1}{x}\ ,\ f_3(x) = x,$$

wszystkie określone na przedziale $(1; +\infty)$. Jeżeli x dąży do $+\infty$, to funkcja f_1 "szybciej" dąży do 0 niż funkcja f_2. Porównanie to jest wynikiem oczywistej nierówności

$$0 < f_1(x) < f_2(x) \ \text{ dla } x \in (1; +\infty).$$

Łatwo widać, że

$$\lim_{x\to+\infty} [f_1(x) \cdot f_3(x)] = [0 \cdot (+\infty)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

podczas, gdy

$$\lim_{x\to+\infty} [f_2(x) \cdot f_3(x)] = [0 \cdot (+\infty)] = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1.$$

Mimo podobnego zachowania się obu czynników w badanych iloczynach (jeden dąży do zera, zaś drugi do 1), wartości granic są różne. Widać stąd, że symbol $[0 \cdot (+\infty)]$ nie ma określonej jednoznacznie wartości.

Wyrażenia $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$ nazywamy symbolami nieoznaczonymi przy x dążącym do x_0, gdy ich zachowanie można opisać umownie na jeden z następujących sposobów:

$$\left[\frac{0}{0}\right]\ ,\quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\ ,\quad [0\cdot\infty]\ ,\quad [\infty-\infty]\,,$$

przy czym znaki nieskończoności oraz sposób dążenia do 0 nie są istotne (w symbolu $[\infty-\infty]$ obie nieskończoności muszą mieć ten sam znak). Te same symbole nieoznaczone poznaliśmy w związku z granicami ciągów liczbowych. Istnieją jeszcze inne symbole nieoznaczone (związane z potęgowaniem), ale nie będziemy się nimi na razie zajmować.

Praktyczna umiejętność obliczania granic funkcji polega między innymi na eliminacji symboli nieoznaczonych na drodze trafnie dobranych przekształceń algebraicznych, bądź innych, bardziej zaawansowanych metod postępowania.

Przykład 5.15 *Obliczymy następujące granice:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^5-2x^3+17x^2\right)=[+\infty-\infty+\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^5\left(4-\frac{2}{x^2}+\frac{17}{x^3}\right)=[+\infty\cdot(4-0-0)]=+\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^2+7x-3}{4-x^2}=\left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(6+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-1}=\left[\frac{6+0-0}{0-1}\right]=-6.$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^4+2x^2+12}{-3x^3+21x}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(5x+\frac{2}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{x^3\left(-3+\frac{21}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x+\frac{2}{x}+\frac{12}{x^2}}{-3+\frac{21}{x^2}}=\left[\frac{-\infty+0+0}{-3+0}\right]=+\infty.$

d) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{12}{4}=3.$

e) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2}{(x-1)^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2(x-1)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2}{(x-1)^2}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty.$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+7}}{3x+2}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}}{\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\frac{\sqrt{1+0+0}}{3+0}=\frac{1}{3}.$

W przykładzie tym przyjęliśmy $|x|=x$, gdyż możemy rozważać $x>0$ przy $x\to+\infty$.

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+7}}{3x+2}=\left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}}{\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\frac{-\sqrt{1+0+0}}{3+0}=-\frac{1}{3}.$

Tu przyjęliśmy $|x|=-x$, gdyż możemy rozważać $x<0$ przy $x\to-\infty$.

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[+\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\left[\frac{1}{+\infty}\right]=0.$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[+\infty+\infty]=+\infty.$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-x\right)=[+\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)=[+\infty\cdot(0-1)]=-\infty.$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2-3}+x} = \left[\frac{2}{+\infty-\infty}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2\left(\sqrt{x^2-3}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-3}+x\right)\left(\sqrt{x^2-3}-x\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2\left(\sqrt{x^2-3}-x\right)}{x^2-3-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2-3}-x\right)\right] = \left[-\frac{2}{3}(+\infty+\infty)\right] = -\infty.$

l) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x}{\sqrt{3}-\sqrt{x^2-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to2}\frac{\left(x^2-2x\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{x^2-1}\right)} = \lim\limits_{x\to2}\frac{\left(x^2-2x\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{x^2-1}\right)}{3-(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to2}\frac{\left(x^2-2x\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{x^2-1}\right)}{4-x^2} = \lim\limits_{x\to2}\frac{x(x-2)\left(\sqrt{3}+\sqrt{x^2-1}\right)}{-(x-2)(2+x)} = \lim\limits_{x\to2}\frac{-x\left(\sqrt{3}+\sqrt{x^2-1}\right)}{2+x} = \frac{-2\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)}{4} = -\sqrt{3}.$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^x-5^{x+1}\right) = [+\infty-\infty] = \lim\limits_{x\to+\infty}5^x\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x-5\right) = [+\infty\cdot(0-5)] = -\infty.$

n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+2}{5^x-1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5^x\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{2}{5^x}\right)}{5^x\left(1-\frac{1}{5^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{2}{5^x}}{1-\frac{1}{5^x}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$

o) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^{3x}-1}{2^x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to0}\frac{(2^x-1)\left(2^{2x}+2^x+1\right)}{2^x-1} = \lim\limits_{x\to0}\left(2^{2x}+2^x+1\right) = 1+1+1 = 3.$

p) $\lim\limits_{x\to1}\frac{4^x-3\cdot2^x+2}{2^x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to1}\frac{(2^x-2)(2^x-1)}{2^x-2} = \lim\limits_{x\to1}(2^x-1) = 2^1-1 = 1.$

Przykład 5.16 *Obliczymy następujące granice jednostronne:*

a) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x+2}{x-1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+2}{x-1} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty.$

c) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2+x-6}{x^2-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to2^-}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to2^-}\frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}.$

d) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{x}{x-2} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty.$

e) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty.$

f) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^3-3x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty.$

Przy obliczaniu granic funkcji mogą być pomocne także następujące twierdzenia:

Twierdzenie 5.17 *(o trzech funkcjach) Niech funkcje f_1, f_2, f_3 będą określone na zbiorze D. Jeżeli w punktach x zbioru D należących do pewnego sąsiedztwa $S(x_0)$ punktu x_0 zachodzi nierówność*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x)$$

oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_3(x) = g$, $g\in\mathbb{R}$, to granica $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$ istnieje i także jest równa g.

Zachodzi także odpowiednie twierdzenie dla granic niewłaściwych:

Twierdzenie 5.18 *Niech funkcje f_1, f_2 będą określone na zbiorze D. Załóżmy, że w punktach x zbioru D należących do pewnego sąsiedztwa $S(x_0)$ punktu x_0 zachodzi nierówność*

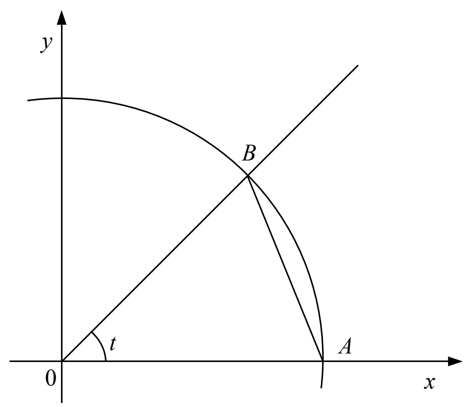
$$f_1(x) \leqslant f_2(x).$$

Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = +\infty$, *to* $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = +\infty$. *Jeżeli* $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = -\infty$, *to* $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = -\infty$.

Przykład 5.19 *Używając twierdzenia o trzech funkcjach pokażemy, że*

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

W tym celu pokażemy najpierw, że dla $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ *zachodzi nierówność* $\sin t < t$. *Istotnie, narysujmy w układzie współrzędnych część okręgu jednostkowego leżącą w I ćwiartce tego układu oraz kąt o mierze* t



Rys. 5.6

Widać, że pole trójkąta OAB *jest mniejsze niż pole wycinka kołowego* OAB. *Pole tego trójkąta wynosi* $\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin t = \frac{\sin t}{2}$, *bo długość promienia okręgu wynosi* 1. *Z drugiej strony wynika stąd, że długość łuku* AB *wynosi* t. *Zatem pole wycinka kołowego* OAB *wynosi* $\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{t}{2\pi} = \frac{t}{2}$. *Mamy więc w konsekwencji nierówność*

$$\frac{\sin t}{2} < \frac{t}{2},$$

czyli

$$\sin t < t.$$

Na oznaczenie miary kąta tylko chwilowo używaliśmy symbolu t, *aby nie mylić go z oznaczeniem osi odciętych. Możemy już wrócić do oznaczania argumentu funkcji przez* x. *Mamy więc nierówność*

$$\sin x < x$$

dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. *Z własności funkcji sinus wiemy, że dla* $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ *spełniona jest nierówność*

$$0 < \sin x.$$

W konsekwencji dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ *mamy nierówność podwójną*

$$0 < \sin x < x. \tag{5.1}$$

Na mocy Twierdzenia 5.17 dostajemy stąd

$$\lim_{x \to 0^+} \sin x = 0.$$

Jeżeli teraz $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, *to z (5.1) mamy nierówność*

$$0 < \sin(-x) < -x,$$

z nieparzystości funkcji sinus dostajemy

$$0 < -\sin x < -x$$

i mnożąc stronami przez -1 *otrzymujemy*

$$x < \sin x < 0.$$

Na mocy Twierdzenia 5.17 mamy stąd

$$\lim_{x \to 0^-} \sin x = 0.$$

Wykorzystując teraz Twierdzenie 5.6 ostatecznie dostajemy

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0. \tag{5.2}$$

Twierdzenie 5.20 *Jeżeli funkcja* f_1 *jest ograniczona na zbiorze* $D \cap S(x_0)$, *gdzie* $S(x_0)$ *jest pewnym sąsiedztwem punktu* x_0, *a* D *jest dziedziną funkcji* f_1 *oraz* $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = 0$, *to*

$$\lim_{x \to x_0} \left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = 0.$$

Powyższe twierdzenie pozostaje prawdziwe, gdy $x_0 = \pm\infty$.

Przykład 5.21 *Na podstawie powyższego twierdzenia obliczymy granicę funkcji* f *danej wzorem*

$$f(x) = \frac{x \cos^2 x}{x^2 - 1}$$

w $-\infty$. *Przyjmijmy* $f_1(x) = \cos^2 x$ *oraz* $f_2(x) = \frac{x}{x^2-1}$. *Ponieważ* $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$ *dla wszystkich* $x \in \mathbb{R}$, *więc funkcja* f_1 *jest ograniczona. Mamy także*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f_2(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{0}{1 - 0} = 0. \end{aligned}$$

Na mocy powyższego twierdzenia wynika stąd, że

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f_1(x) f_2(x) = 0.$$

Twierdzenie 5.22 *(o granicy złożenia funkcji) Niech złożenie $f \circ h$ będzie okreś-lone na zbiorze zawierającym pewne sąsiedztwo $S(x_0)$ punktu x_0. Jeżeli*

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = u_0,$$

przy czym $h(x) \neq u_0$ dla $x \in S(x_0)$ oraz $\lim_{u \to u_0} f(u) = g$, to $\lim_{x \to x_0} f(h(x)) = g$.

Twierdzenia 5.17, 5.20 i 5.22 są także prawdziwe dla granic jednostronnych oraz dla granic w punktach niewłaściwych $\pm\infty$.

Zauważmy, że z (5.2), wzorów (2.13), (2.6) oraz twierdzenia o granicy złożenia funkcji dostajemy

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 1, \tag{5.3}$$

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0. \tag{5.4}$$

Przykład 5.23 *Niech $f(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}$. Korzystając z Twierdzenia 5.17 obliczymy granicę tej funkcji w $+\infty$. Wiemy, że $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ dla $x \in \mathbb{R}$. Stąd dostajemy*

$$\frac{-1}{x^2+1} \leqslant \frac{\sin x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{x^2+1}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Ponadto mamy

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-1}{1+x^2} = \left[\frac{-1}{+\infty}\right] = 0,$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+x^2} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0.$$

Zatem na mocy wspomnianego twierdzenia otrzymujemy

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x^2+1} = 0.$$

Warto zauważyć, że rozważaną tu granicę można także łatwo obliczyć na podstawie Twierdzenia 5.20.

W wielu zadaniach bardzo użyteczne jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.24 *Prawdziwa jest równość*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Przykład 5.25 *Obliczymy następujące granice funkcji:*

a) $\lim_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} \sin u = \lim_{u \to 0^+} \frac{\sin u}{u} = 1$, *gdzie* $u = \frac{1}{x}$.

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x \cos x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2 \cos x}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\right)=\left[1\cdot\frac{1}{0^+}\right]=+\infty.$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\right)=$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}}\right)=3\cdot 1\cdot\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{3}{5},$$

gdzie obliczając np. granicę $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin 3x}{3x}$ *skorzystaliśmy z Twierdzenia 5.22. Mianowicie funkcja* $x\mapsto\frac{\sin 3x}{3x}$ *jest równa* $f\circ h$*, gdzie* $h(x)=3x$ *oraz* $f(u)=\frac{\sin u}{u}$*. Ponieważ* $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0}3x=0$ *oraz* $\lim\limits_{u\to 0^-}f(u)=\lim\limits_{u\to 0^-}\frac{\sin u}{u}=1$ *na mocy Twierdzenia 5.24, więc zgodnie z twierdzeniem o granicy złożenia mamy* $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin 3x}{3x}=1.$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x}=$

$$\lim_{x\to 0}\left(-2\sin x\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=-2\cdot 0\cdot 1=0.$$

Zauważmy, że w przykładach b) - e) korzystaliśmy z równości (5.2), (5.3) i (5.4).

Przykład 5.26 *Niech* $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ *będzie funkcją określoną wzorem*

$$f(x)=\begin{cases}2+3^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x<0\\ \frac{x^2+x}{2-\sqrt{4+x}} & \text{dla } x>0\end{cases}.$$

Sprawdzimy, czy funkcja f *posiada granicę w punkcie* $x_0=0$*. W tym celu obliczymy granice jednostronne tej funkcji w zadanym punkcie. Dostajemy*

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(2+3^{\frac{1}{x}}\right)=\left[2+3^{\frac{1}{0^-}}\right]=\left[2+3^{-\infty}\right]=2+0=2$$

oraz

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}f(x)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{2-\sqrt{4+x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+1)\left(2+\sqrt{4+x}\right)}{\left(2-\sqrt{4+x}\right)\left(2+\sqrt{4+x}\right)}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+1)\left(2+\sqrt{4+x}\right)}{4-(4+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\left(2+\sqrt{4+x}\right)}{-1}\\&=\lim_{x\to 0^+}(-x-1)\left(2+\sqrt{4+x}\right)=(-1)\left(2+\sqrt{4}\right)=-4.\end{aligned}$$

Zatem otrzymujemy $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$*, a stad wynika na mocy Twierdzenia 5.6, że rozważana funkcja nie posiada granicy w punkcie* $x_0=0$*.*

5.3 Ciągłość funkcji

Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze $D_f\subset\mathbb{R}$ oraz niech $x_0\in D_f$. Wówczas musi zajść jeden z dwóch warunków: albo każde jego sąsiedztwo zawiera punkty z D_f, albo istnieje sąsiedztwo rozłączne z D_f. W tych dwóch przypadkach zdefiniujemy pojęcie ciągłości funkcji f w punkcie x_0.

Definicja 5.27 *Jeżeli każde sąsiedztwo punktu x_0 zawiera punkty zbioru D_f, to mówimy, że f jest ciągła w x_0, gdy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Dodatkowo przyjmujemy, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie, który posiada pewne sąsiedztwo rozłączne z D_f.*

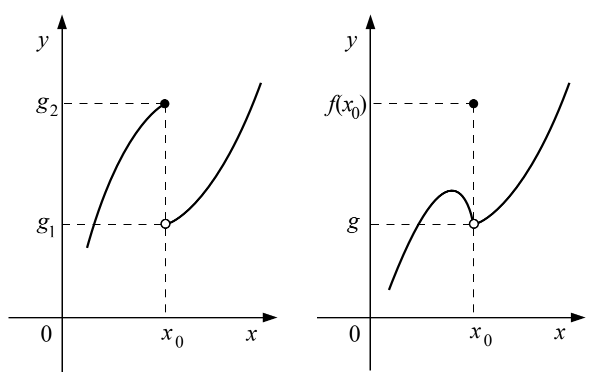
Jeżeli każde lewostronne i każde prawostronne sąsiedztwo punktu x_0 ma niepustą część wspólną z D_f, to z przyjętej definicji i Twierdzenia 5.6 wynika, że f nie jest ciągła w $x_0 \in D_f$, gdy

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

(przyjmujemy, że powyższy warunek zachodzi także w przypadku, gdy któraś z granic (bądź obie) nie istnieje) lub

$$\text{istnieje granica } \lim_{x\to x_0} f(x) = g \text{ i } g \neq f(x_0)\,.$$

Na poniższym rysunku przedstawiamy obie omówione sytuacje



Rys. 5.7

W pierwszym układzie współrzędnych mamy $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g_1 \neq g_2 = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, zaś w drugim $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g \neq f(x_0)$.

Przykład 5.28 *a) Sprawdzimy, czy funkcja f zadana wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4 & dla\ x \leqslant 1 \\ -x^2 + 6x + 3 & dla\ x < 1 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$. W tym celu obliczymy najpierw granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0. Otrzymujemy łatwo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^2 - 2x + 4\right) = 3$$

oraz
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(-x^2+6x+3\right) = 8.$$
Wartości granic jednostronnych są różne, co oznacza, że nie istnieje granica funkcji f w punkcie x_0, a co za tym idzie funkcja ta nie jest ciągła w $x_0 = 1$.

b) Sprawdzimy, czy funkcja f zadana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{\sin x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$
jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$. W tym celu obliczymy najpierw granice jednostronne tej funkcji w punkcie $x_0 = 0$. Używając metod użytych w Przykładzie 5.25 d) dostajemy łatwo
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 3x}{\sin x} = 3.$$
Oznacza to, że funkcja f posiada granicę równą 3 w punkcie $x_0 = 0$. Mamy jednak $f(0) = 1 \neq 3$, co daje nam nieciągłość funkcji f w punkcie $x_0 = 0$.

c) Sprawdzimy, czy funkcja f dana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x} & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0 \\ x \cdot 2^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{2} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$
jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$. W tym celu obliczymy najpierw granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0:
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = \lim_{u\to 0^-} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin u}{u}\right) = \frac{1}{2}$$
oraz
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left(x \cdot 2^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{2}\right) = \left[0 \cdot 2^{-\frac{1}{0^+}} + \frac{1}{2}\right] \\ &= \left[0 \cdot 2^{-\infty} + \frac{1}{2}\right] = 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
Zatem granice jednostronne funkcji f w rozważanym punkcie są równe $\frac{1}{2}$. Wobec tego na mocy Twierdzenia 5.6 funkcja f posiada granicę równą $\frac{1}{2}$ w punkcie $x_0 = 0$. Mamy także $f(0) = \frac{1}{2}$, co daje równość
$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$
Zatem funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

Definicja 5.29 *Jeżeli każde lewostronne (odpowiednio prawostronne) sąsiedztwo punktu $x_0 \in D_f$ zawiera punkty dziedziny D_f funkcji f, to mówimy, że f jest ciągła lewostronnie (odpowiednio prawostronnie) w punkcie x_0, gdy*
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad \textit{(odpowiednio } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)\textit{).}$$

Twierdzenie 5.30 *Jeżeli każde lewostronne i każde prawostronne sąsiedztwo punktu $x_0 \in D_f$ zawiera punkty dziedziny D_f funkcji f, to funkcja f jest ciągła w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie lewostronnie i prawostronnie ciągła w tym punkcie.*

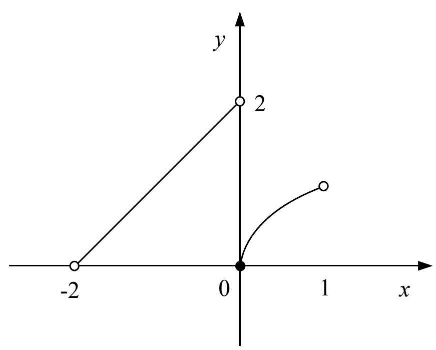
Przykład 5.31 *a) Niech $f : (-2;1) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & dla\ x \in (-2;0) \\ \sqrt{x} & dla\ x \in \langle 0;1) \end{cases} .$$

Oczywiście istnieje sąsiedztwo punktu 0, na którym określona jest funkcja f, np. $S(0) = (-1;0) \cup (0;1)$. Mamy

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+2) = 2,$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0,$$

co oznacza, że rozważana funkcja nie jest ciągła w 0. Naszkicujmy jej wykres



Rys. 5.8

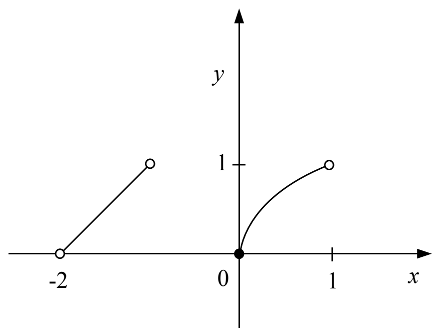
b) Niech $f : (-2;-1) \cup \langle 0;1) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & dla\ x \in (-2;-1) \\ \sqrt{x} & dla\ x \in \langle 0;1) \end{cases} .$$

Funkcja ta jet określona w punkcie 0 oraz w jego prawostronnym sąsiedztwie $S^+(0) = (0;1)$ i istnieje lewostronne sąsiedztwo punktu 0 (np. $S^-(0) = (-1;0)$), w którym f nie jest określona. Oznacza to, że ciągłość funkcji f w punkcie 0 jest równoznaczna z jej prawostronną ciągłością w tym punkcie. Mamy

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0),$$

czyli funkcja f jest ciągła w 0. Naszkicujmy jej wykres



Rys. 5.9

Twierdzenie 5.32 *Suma, różnica oraz iloczyn funkcji ciągłych w punkcie x_0 są ciągłe w punkcie x_0. Iloraz $\frac{f_1}{f_2}$ funkcji ciągłych w punkcie x_0, gdzie $f_2(x_0) \neq 0$, jest funkcją ciągłą w x_0.*

Twierdzenie 5.33 *Jeżeli funkcja f_1 jest ciągła w x_0 i funkcja f_2 jest ciągła w punkcie $u_0 = f_1(x_0)$, to złożenie $f_2 \circ f_1$ jest funkcja ciągłą w x_0.*

Podamy teraz definicję funkcji ciagłej w zbiorze.

Definicja 5.34 *Mówimy, że funkcja jest ciągła w zbiorze, gdy jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.*

Zgodnie z powyższą definicją i poprzednimi definicjami funkcja jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie przedziału $(a; b)$ oraz jest prawostronnie ciągła w punkcie a i lewostronnie ciągłą w punkcie b.

Poniżej podajemy twierdzenie, które jest podstawowym narzędziem w stwierdzaniu ciągłości funkcji w zbiorze.

Twierdzenie 5.35 *Każda funkcja elementarna jest ciągła w swojej dziedzinie.*

Z powyższego twierdzenia w szczególności wynika, że wielomiany, funkcje wymierne, funkcje potęgowe, funkcje wykładnicze, funkcje trygonometryczne oraz ich złożenia są ciągłe w swoich dziedzinach.

Przykład 5.36 *Dobierzemy, o ile to możliwe, parametr a tak, aby funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - ax - 12 & \text{dla } x \leqslant 3 \\ \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-3x} & \text{dla } x > 3 \end{cases}$$

była ciągła w całej dziedzinie. Dla każdego $x \in (-\infty; 3)$ istnieje otoczenie punktu x, na którym funkcja f pokrywa się z wielomianem, zatem jest funkcją ciągłą w $(-\infty; 3)$. Dla każdego $x \in (3; +\infty)$ istnieje otoczenie punktu x takie, że funkcja

f pokrywa się z funkcją elementarną daną wzorem $y = \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-3x}$, skąd wynika, że funkcja f jest ciągłą w $(3; +\infty)$. Zatem rozważana funkcja jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Pozostaje więc dobrać, o ile to możliwe, parametr a tak, aby funkcja f była ciągła w punkcie $x_0 = 3$. Mamy $f(3) = 24 - 3a$. Obliczmy teraz granice jednostronne w punkcie $x_0 = 3$. Otrzymujemy

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(4x^2 - ax - 12\right) = 24 - 3a$$

oraz

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3^+} f(x) &= \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 3^+} \frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(x^2-3x\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} \\
&= \lim_{x \to 3^+} \frac{x-3}{x(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x\left(\sqrt{x+6}+3\right)} \\
&= \frac{1}{3\left(\sqrt{3+6}+3\right)} = \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

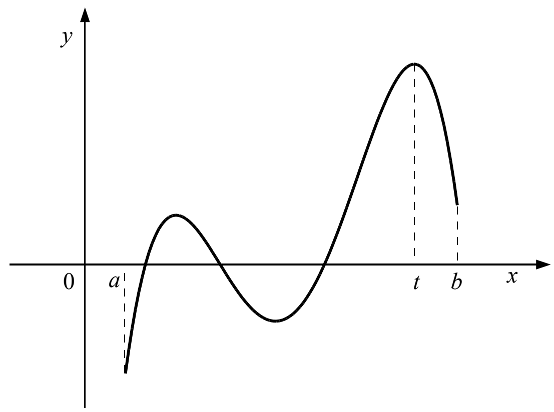
Funkcja f będzie ciągła w punkcie $x_0 = 3$ jedynie wtedy, gdy jej granice jednostronne w 3 będą równe jej wartości w tym punkcie. Stąd otrzymujemy, że funkcja f będzie ciągłą w punkcie $x_0 = 3$ dla wartości parametru a spełniającej warunek $24 - 3a = \frac{1}{18}$. Zatem dla $a = \frac{431}{54}$ funkcja f jest ciągła w całej dziedzinie.

5.4 Własności funkcji ciągłych

Przytoczymy dwie ważne własności funkcji ciągłych o dużym znaczeniu w wielu zagadnieniach analizy matematycznej.

Twierdzenie 5.37 (Weierstrass) *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$, to jest ograniczona oraz przyjmuje swoją wartość najmniejszą i największą na tym przedziale.*

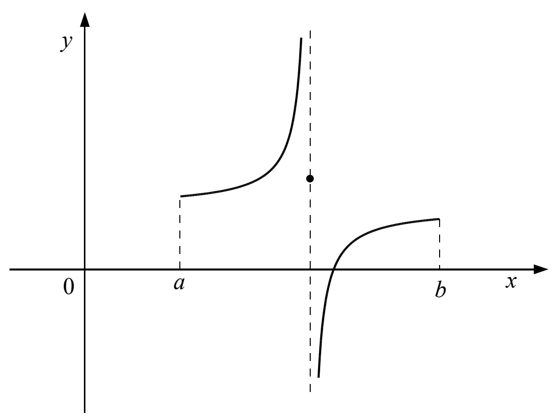
Często o funkcji, która przyjmuje swoją wartość najmniejszą i największą mówi się, że spełnia warunek Weierstrassa. Przedstawimy na rysunku ilustrację twierdzenia Weierstrassa.



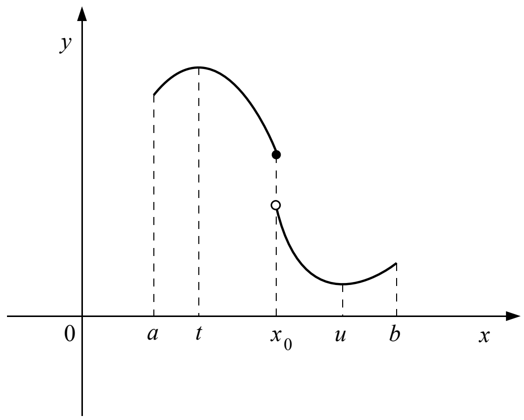
Rys. 5.10

Na rysunku tym funkcja f osiąga najmniejszą swoją wartość w punkcie a oraz największą swoją wartość w punkcie t.

Założenie ciągłości w Twierdzeniu Weierstrassa jest istotne. Na kolejnym rysunku pokażemy, że brak ciągłości choćby w jednym punkcie powoduje, że funkcja nie osiągnie ani wartości najmniejszej ani największej (Rys. 5.11). Pamiętajmy jednak, że istnieją funkcje nieciągłe, które osiągają swoją wartość najmniejszą i największą (Rys. 5.12).



Rys. 5.11



Rys. 5.12

Funkcja o powyższym wykresie nie jest ciągła w punkcie x_0, ale osiąga swoją wartość najmniejszą w punkcie u i swoją wartość największą w punkcie t.

Twierdzenie 5.38 (Darboux) *Jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale domkniętym $\langle a;b\rangle$ taką, że $f(a) \neq f(b)$ oraz w jest dowolną liczbą z przedziału otwartego o krańcach $f(a)$ i $f(b)$, to istnieje liczba $c \in (a;b)$ taka, że $f(c) = w$.*

Powyższe twierdzenie można sformułować także w następujący sposób:

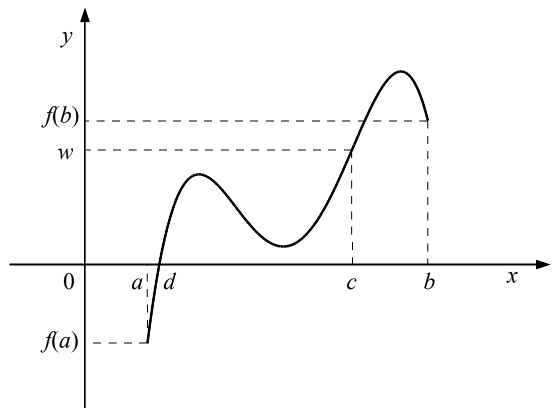
Funkcja ciągła na $\langle a;b\rangle$ taka, że $f(a) \neq f(b)$, przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między $f(a)$ i $f(b)$.

O funkcji, która przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między swoimi wartościami na krańcach przedziału mówi się, że spełnia warunek Darboux.

Z Twierdzenia Darboux wynika natychmiast następujący wniosek

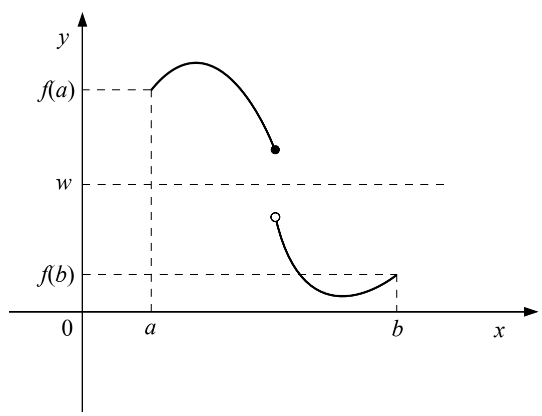
Wniosek 5.39 *Jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale domkniętym $\langle a;b\rangle$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje $d \in (a;b)$ takie, że $f(d) = 0$.*

Powyższy wniosek mówi więc, że ciągła funkcja określona na przedziale domkniętym i taka, że jej wartości na krańcach tego przedziału mają przeciwne znaki musi mieć miejsce zerowe wewnątrz przedziału. Twierdzenie Darboux i powyższy wniosek zilustrujemy na rysunku.



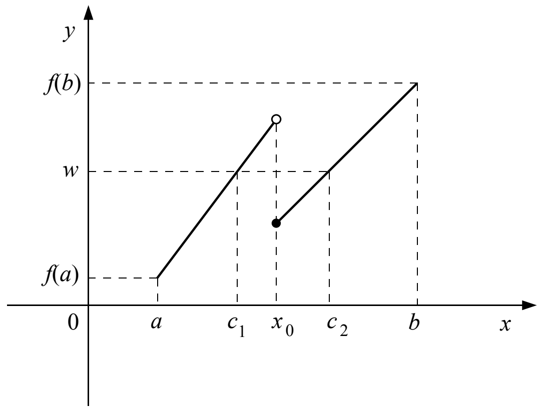
Rys. 5.13

Jeżeli funkcja nie jest ciągła na przedziale $\langle a; b\rangle$, to nie musi spełniać warunku Darboux. Zilustrujemy to wykresem



Rys. 5.14

Z drugiej jednak strony istnieją funkcje nieciągłe, które spełniają warunek Darboux.



Rys. 5.15

Przykład 5.40 *a) Pokażemy, że funkcja* f *dana wzorem* $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x - 1$ *posiada miejsce zerowe w przedziale* $\langle 0; 1 \rangle$. *Funkcja* f *jest wielomianem, zatem jest ciągła. Ponadto mamy* $f(0) = -1$ *oraz* $f(1) = 1$, *czyli* $f(0) \cdot f(1) < 0$. *Zatem mamy spełnione założenia Wniosku 5.39, czyli istnieje punkt* $d \in (0; 1)$ *taki, że* $f(d) = 0$.

b) Pokażemy, że równanie $3\sin^2 x - 2\cos^3 x = 0$ *ma pierwiastek w przedziale* $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$. *Z Twierdzenia 5.35 wynika, że funkcja dana wzorem* $f(x) = 3\sin^2 x - 2\cos^3 x$ *jest ciągła. Ponadto mamy*

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} < 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2 > 0.$$

Zatem z Wniosku 5.39 istnieje $d \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$ *takie, że* $f(d) = 0$, *czyli rozważane równanie ma pierwiastek w przedziale* $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$.

c) Dla wielomianu W *stopnia nieparzystego łatwo jest wykazać, że jeżeli współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest dodatni, to* $\lim\limits_{x \to -\infty} W(x) = -\infty$ *i* $\lim\limits_{x \to +\infty} W(x) = +\infty$ *oraz jeżeli współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest ujemny, to* $\lim\limits_{x \to -\infty} W(x) = +\infty$ *i* $\lim\limits_{x \to +\infty} W(x) = -\infty$. *Zatem w obu przypadkach istnieje przedział* $\langle a; b \rangle$ *taki, że wielomian* W *przyjmuje na krańcach tego przedziału wartości różnych znaków. Zatem mamy* $W(a) \cdot W(b) < 0$, *co wobec ciągłości wielomianu, na mocy własności Darboux pokazuje, że każdy wielomian stopnia nieparzystego posiada miejsce zerowe.*

5.5 Asymptoty wykresu funkcji

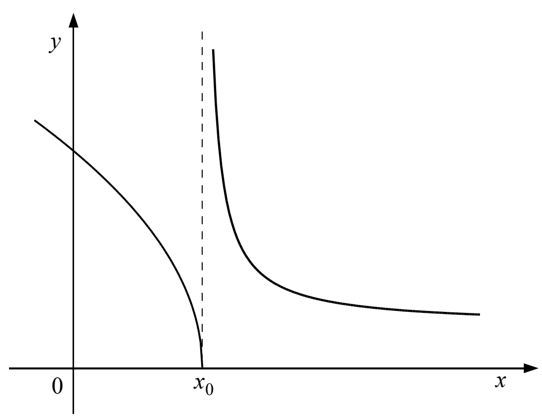
Umiejętność obliczania granic funkcji pozwala wyznaczać tzw. asymptoty wykresu funkcji. Są to pewne proste do których dąży wykres. Zdefiniujemy teraz pojęcia asymptot i pokażemy, jak je wyznaczać.

Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$ i załóżmy, że punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ spełnia następujący warunek: każde sąsiedztwo $S(x_0)$ punktu x_0 zawiera punkty dziedziny D_f.

Definicja 5.41 *Prostą o równaniu $x = x_0$ nazywamy asymptotą pionową wykresu funkcji f, gdy co najmniej jedna z granic jednostronnych*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \textit{lub} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

jest niewłaściwa. Jeżeli tylko granica lewostronna (odp. prawostronna) jest niewłaściwa, to mówimy o asymptocie lewostronnej (odp. prawostronnej), a jeśli obie są niewłaściwe, to mówimy o asymptocie obustronnej.



Rys. 5.16

Na rysunku prosta o równaniu $x = x_0$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji. Jest to asymptota prawostronna, która nie jest asymptotą obustronną.

Zauważmy, że jeżeli f jest funkcją elementarną, to jedynymi asymptotami pionowymi mogą być proste o równaniu $x = x_0$, gdzie x_0 jest skończonym krańcem dziedziny funkcji f nie należącym do dziedziny. Istotnie, funkcja elementarna jest ciągła w swojej dziedzinie (Twierdzenie 5.35), więc w żadnym punkcie dziedziny nie może mieć granicy niewłaściwej. Z drugiej strony jedynymi punktami spoza dziedziny, dla których dowolne sąsiedztwo zawiera punkty dziedziny mogą być krańce dziedziny. Zauważmy dalej, że w tym przypadku powyższa definicja daje nam metodę na wyznaczanie asymptot pionowych.

Załóżmy teraz, że dziedzina D_f funkcji f zawiera przedział postaci $(a; \infty)$ (odp. $(-\infty; b)$).

Definicja 5.42 *Prostą o równaniu $y = mx + n$ nazywamy asymptotą ukośną wykresu funkcji f w $+\infty$ (odp. w $-\infty$), gdy*

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$$

$$\text{(odp. } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0\text{).}$$

Widać, że definicja ta nie pozwala efektywnie wyznaczyć asymptoty ukośnej. Potrzebne więc jest

Twierdzenie 5.43 *Załóżmy, że $f : D_f \to \mathbb{R}$, przy czym $(a;\infty) \subset D_f$ (odp. $(-\infty;b) \subset D_f$). Prosta o równaniu $y = mx + n$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji f w $+\infty$ (odp. w $-\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy*

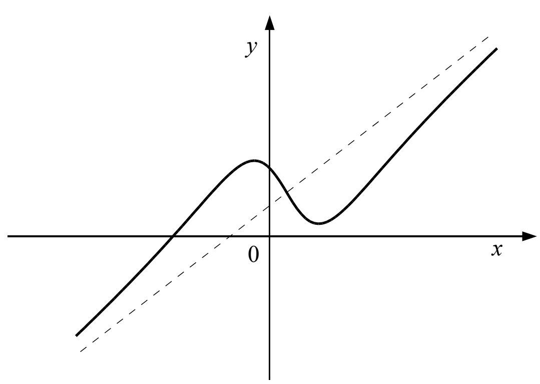
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$$

$$\text{(odp. } m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx)\text{).}$$

Uwaga 5.44 *Zauważmy, że jeżeli $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, to drugą granicą, którą musimy obliczyć w powyższym twierdzeniu jest $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Jeżeli ta ostatnia granica jest skończona i równa n, to otrzymujemy szczególny przypadek asymptoty ukośnej w $+\infty$ o równaniu $y = n$, czyli asymptotę poziomą. Odwrotnie, jeśli wykres funkcji f ma asymptotę poziomą o równaniu $y = n$, to wprost z definicji asymptoty ukośnej widać, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = n$ i $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Analogiczna uwaga obowiązuje dla asymptot w $-\infty$.*

Zauważmy jeszcze, że z jednoznaczności granicy (Twierdzenie 5.12) wynika, że wykres funkcji nie może mieć dwóch różnych asymptot ukośnych w $+\infty$, ani dwóch różnych asymptot ukośnych w $-\infty$.

Oto rysunek pokazujący czym jest asymptota ukośna:



Rys. 5.17

Przykład 5.45 *Wyznaczymy wszystkie asymptoty wykresu funkcji f danej wzorem $f(x) = x - \frac{1}{x+1}$. Zauważmy, że dziedziną funkcji f jest $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ i funkcja ta jest elementarna, zatem tylko prosta $x = -1$ może być asymptotą pionową. Sprawdzimy czy tak jest. W tym celu obliczamy granice jednostronne*

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(x - \frac{1}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(x - \frac{1}{x+1} \right) = -\infty.$$

Widać więc, że prosta $x = -1$ jest asymptotą pionową obustronną. Ponieważ funkcja jest określona w $(-1;\infty)$, więc jest sens szukać asymptoty ukośnej w $+\infty$. Obliczamy w tym celu granice

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x(x+1)} \right) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 1 \cdot x] = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x+1} \right) = 0.$$

Zatem w $+\infty$ istnieje asymptota ukośna i ma ona równanie $y = x$. Ponieważ funkcja f jest określona w $(-\infty; -1)$, więc jest sens również szukać asymptoty ukośnej w $-\infty$. Łatwo widać, że odpowiednie granice w $-\infty$ są takie same, jak w $+\infty$. Zatem istnieje asymptota ukośna w $-\infty$ i jej równanie jest postaci $y = x$.

Rozdział 6

Pochodna

6.1 Pojęcie pochodnej

Załóżmy, że punkt P porusza się po osi liczbowej. Niech $s(t)$ oznacza współrzędną punktu, w którym znajduje się P w chwili t. W ten sposób określiliśmy funkcję s, która opisuje położenie punktu P w zależności od czasu.

Rys. 6.1

Łatwo jest odpowiedzieć na pytanie: Jaka jest średnia prędkość punktu P w przedziale czasowym od chwili t_0 do chwili t? Oczywiście musimy podzielić drogę przebytą w tym przedziale czasowym przez czas, który upłynął od chwili t_0 do chwili t. Zatem prędkość średnia wynosi:

$$v_{śr} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}. \tag{6.1}$$

Trudniej znaleźć odpowiedź na pytanie: Jaka jest prędkość chwilowa punktu P w chwili t_0? Intuicyjnie wydaje się oczywiste, że, aby w przybliżeniu podać prędkość chwilową, musimy obliczyć prędkość średnią dla bardzo krótkiego przedziału czasowego, czyli przy t bardzo bliskim t_0. Stąd pomysł, aby prędkość chwilową obliczać jako granicę prędkości średniej (6.1) przy t dążącym do t_0:

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Stąd pojawiło się pojęcie pochodnej funkcji w punkcie.

Niech $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a; b)$.

Definicja 6.1 *Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{6.2}$$

o ile ta granica istnieje i jest skończona. Jeżeli istnieje $f'(x_0)$, to mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, zaś proces obliczania pochodnej funkcji f nazywamy różniczkowaniem funkcji f. Wyrażenie $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ występujące w definicji pochodnej nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f odpowiadającym przyrostowi argumentu od x_0 do x.

Zauważmy, że z rozważań zamieszczonych przed definicją wynika, że pochodna funkcji f w punkcie x_0 mierzy prędkość chwilową zmian funkcji f w momencie, gdy argument przechodzi przez punkt x_0.

Czasami wzór definicyjny (6.2) bywa zapisywany w innych formach. Mianowicie, jeżeli przez Δx lub h oznaczymy przyrost argumentu $x - x_0$, to otrzymujemy

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

lub

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Przykład 6.2 *a) Obliczymy pochodną funkcji*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

w punkcie $x_0 = 2$. Zauważmy, że f jest określona w pewnym otoczeniu liczby x_0. Na mocy definicji obliczymy granicę

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{3}}{x - 2}.$$

Zauważmy, że granica ta jest symbolem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$. Rozszerzając wyrażenie, z którego liczona jest granica przez $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}$, a następnie skracając przez $x - 2$, dostajemy

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{3}}{x - 2} &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}\right)} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}\right)} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}\right)} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Zatem dla naszej funkcji f mamy $f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Obliczymy teraz pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + x - 2}$$

w punkcie $x_0 = 0$, którego otoczenie zawiera się w dziedzinie funkcji f. Na mocy definicji obliczamy granicę

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^3+x-2} - \frac{1}{-2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2+x^3+x-2}{2(x^3+x-2)}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(x^2+1\right)}{2x\left(x^3+x-2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{2\left(x^3+x-2\right)} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Zatem dla funkcji f mamy $f'(0) = -\frac{1}{4}$.

Przykład 6.3 *Pokażemy, że funkcja $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$. W tym celu obliczymy granice jednostronne wyrażenia $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ w punkcie 0:*

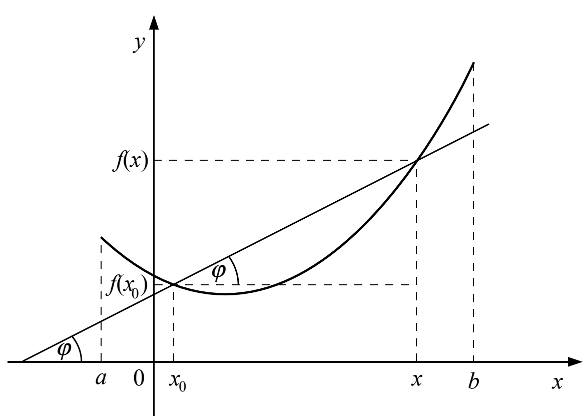
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

bo dla $x < 0$ mamy $|x| = -x$ oraz

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

bo dla $x > 0$ mamy $|x| = x$. Zatem nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, czyli nie istnieje pochodna funkcji f w punkcie 0. Funkcja f nie jest różniczkowalna w 0.

Zastanówmy się teraz nad interpretacją geometryczną pochodnej funkcji w punkcie. W tym celu zobaczmy jaka jest interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego funkcji f odpowiadającego przyrostowi argumentu od x_0 do x.



Rys. 6.2

Załóżmy, podobnie, jak przy formułowaniu Twierdzenia 2.26, że na obu osiach układu współrzędnych przyjęliśmy te same jednostki. Przy tym zastrzeżeniu z rysunku widać jasno, że iloraz różnicowy odpowiadający przyrostowi argumentu od x_0 do x jest tangensem kąta φ nachylenia siecznej wykresu funkcji przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x, f(x))$ do dodatniej półosi osi Ox. Inaczej, iloraz ten jest współczynnikiem kierunkowym opisanej wyżej siecznej. Załóżmy teraz, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0. Wówczas przy x dążącym do x_0 współczynniki kierunkowe siecznych dążą do współczynnika kierunkowego pewnej prostej, bo granica ilorazu różnicowego przy x dążącym do x_0 istnieje i jest skończona. Mamy następującą definicję

Definicja 6.4 *Prostą o równaniu $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ nazywamy styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.*

Zatem pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Uwzględniając intuicyjne rozumienie stycznej do wykresu, widzimy więc znowu, że pochodna funkcji w punkcie mierzy prędkość chwilową zmian wartości funkcji w argumencie x_0.

Zachodzi następujące

Twierdzenie 6.5 *Niech $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a; b)$. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.*

Zauważmy, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Istotnie, funkcja $f(x) = |x|$ jest funkcją ciągłą, ale, jak pokazuje Przykład 6.3, funkcja ta nie jest różniczkowalna w punkcie 0.

Załóżmy teraz, że funkcja $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie pewnego zbioru $D \subset (a; b)$.

Definicja 6.6 *Funkcję, która każdemu punktowi $x \in D$ przyporządkowuje pochodną funkcji f w tym punkcie, czyli liczbę $f'(x)$, nazywamy funkcją pochodną (lub krótko pochodną) funkcji f i oznaczamy ją symbolem f'. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie przedziału $(a; b)$, czyli pochodna f' jest określona w $(a; b)$, to o funkcji f mówimy, że jest różniczkowalna w $(a; b)$.*

Czasami przydatne bywa pojęcie różniczkowalności funkcji w przedziale domkniętym. W związku z tym wprowadzamy następujące określenie:

Definicja 6.7 *Niech $f : \langle a; b \rangle \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a (odp. w punkcie b), gdy istnieje i jest skończona granica*

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \textit{(odp. } f'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}\textit{).}$$

Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $\langle a; b \rangle$, gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie tego przedziału.

6.2 Własności pochodnej

Sformułujemy teraz twierdzenia wiążące pochodną z działaniami algebraicznymi, które możemy wykonywać na funkcjach o wartościach rzeczywistych.

Twierdzenie 6.8 *Załóżmy, że funkcje f, g są określone przynajmniej na pewnym otoczeniu liczby x_0 oraz, że k jest dowolną liczbą rzeczywistą. Jeżeli funkcje te są różniczkowalne w punkcie x_0, to funkcje:*
1) $kf : x \mapsto k \cdot f(x)$,
2) $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$,
3) $f - g : x \mapsto f(x) - g(x)$,
4) $fg : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$,
5) $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ (przy dodatkowym założeniu, że $g(x_0) \neq 0$)
są różniczkowalne w punkcie x_0 i zachodzą wzory:

$$(kf)'(x_0) = k \cdot f'(x_0), \tag{6.3}$$

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \tag{6.4}$$

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0), \tag{6.5}$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0), \tag{6.6}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \tag{6.7}$$

Badanie różniczkowalności funkcji sprowadza się do badania różniczkowalności tej funkcji w każdym punkcie dziedziny, więc natychmiast z Twierdzenia 6.8 otrzymujemy następujące:

Twierdzenie 6.9 *Załóżmy, że funkcje $f, g : (a; b) \to \mathbb{R}$ są funkcjami różniczkowalnymi w $(a; b)$ i $k \in \mathbb{R}$. Wówczas funkcje kf, $f + g$, $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$ (przy dodatkowym założeniu, że funkcja g nie ma miejsc zerowych w przedziale $(a; b)$) są różniczkowalne w $(a; b)$, przy czym prawdziwe są wzory:*

$$(kf)' = k \cdot f', \tag{6.8}$$

$$(f+g)' = f' + g', \tag{6.9}$$

$$(f-g)' = f' - g', \tag{6.10}$$

$$(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g', \tag{6.11}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}. \tag{6.12}$$

Możemy także sformułować twierdzenia, które powiedzą nam co się dzieje, gdy różniczkujemy złożenia funkcji:

Twierdzenie 6.10 *Załóżmy, że funkcja f jest określona co najmniej na pewnym otoczeniu U punktu x_0, na otoczeniu tym przyjmuje wartości z pewnego otoczenia V punktu $f(x_0)$, na którym określona jest funkcja g różniczkowalna w punkcie $f(x_0)$. Wówczas funkcja $g \circ f$ jest różniczkowalna w punkcie x_0, przy czym zachodzi równość*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \tag{6.13}$$

Twierdzenie 6.11 *Załóżmy, że funkcja $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w przedziale $(a;b)$, przyjmuje wartości w przedziale $(c;d)$ oraz, że funkcja $g : (c;d) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w przedziale $(c;d)$. Wówczas funkcja $g \circ f$ jest różniczkowalna w przedziale $(a;b)$, przy czym zachodzi równość*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'. \tag{6.14}$$

Czasami krótko mówimy, że pochodna złożenia funkcji jest iloczynem pochodnej funkcji zewnętrznej przez pochodną funkcji wewnętrznej. Trzeba jednak pamiętać, że pochodną funkcji zewnętrznej obliczamy zawsze w punkcie, który jest wartością funkcji wewnętrznej.

Podamy teraz wzory na pochodne pewnych funkcji podstawowych:

$$f(x) = c, \text{ gdzie } c \text{ jest stałą} \implies f'(x) = 0, \tag{6.15}$$

$$f(x) = x^\alpha, \text{ gdzie } \alpha \text{ jest stałą} \implies f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \tag{6.16}$$

$$f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x, \tag{6.17}$$

$$f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x, \tag{6.18}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \implies f'(x) = \tfrac{1}{\cos^2 x}, \tag{6.19}$$

$$f(x) = \operatorname{ctg} x \implies f'(x) = -\tfrac{1}{\sin^2 x}. \tag{6.20}$$

Wyprowadzimy przykładowo wzory (6.15), (6.16) (dla α naturalnego), (6.17) i (6.19):

- Weźmy dowolne $x \in \mathbb{R}$ i obliczmy granicę:

  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

  Zatem pochodna w dowolnym punkcie x istnieje i wynosi 0.

- Weźmy dowolne $x \in \mathbb{R}$ i zamiast α, które jest liczbą naturalną piszmy dalej n. Obliczmy granicę:

  $$\begin{aligned}
  &\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
  &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
  &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-x)\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + \ldots + (x+h) x^{n-2} + x^{n-1}\right]}{h} \\
  &= \lim_{h \to 0} \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + \ldots + (x+h) x^{n-2} + x^{n-1}\right] \\
  &= n x^{n-1}.
  \end{aligned}$$

Zatem pochodna funkcji $f(x) = x^n$ istnieje i wyraża się wzorem $f'(x) = nx^{n-1}$.

- Weźmy dowolne $x \in \mathbb{R}$. Wykorzystując wzór na różnicę sinusów (2.17), twierdzenie mówiące, że $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ oraz ciągłość funkcji kosinus, obliczamy granicę:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.
\end{aligned}$$

  Zatem pochodna funkcji $f(x) = \sin x$ istnieje w każdym punkcie zbioru $\mathbb{R}$ i wyraża się wzorem $f'(x) = \cos x$.

- Weźmy dowolne $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Ponieważ funkcje sinus i kosinus są różniczkowalne w $\mathbb{R}$, więc na mocy Twierdzenia 6.9 funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ jest różniczkowalna w punkcie x. Ponadto ze wzoru (6.12) mamy

$$\begin{aligned}
f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

  na mocy wzorów (6.17) i (6.18) oraz "jedynki trygonometrycznej".

Zauważmy, że ze wzoru (6.16) w szczególności wynikają następujące często przydatne wzory:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \tag{6.21}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \tag{6.22}$$

Uwaga 6.12 *Z Twierdzenia 6.9 oraz ze wzoru (6.16) wynika, że wielomiany oraz funkcje wymierne są funkcjami różniczkowalnymi w całych swoich dziedzinach.*

Przykład 6.13 *a) Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x$. Zauważmy, że dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \mathbb{R}$. Korzystając ze wzorów (6.9), (6.10), (6.8) oraz ze wzoru (6.16) mamy:*

$$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 = 12x^2 + 6x - 5$$

i $D_{f'} = \mathbb{R}$.

b) Niech teraz $f(x) = \sqrt{x}\cos x$. Zauważmy, że dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \langle 0, \infty)$. Korzystając ze wzorów (6.11), (6.21) oraz ze wzoru (6.18) mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{x}\right)' \cdot \cos x + \sqrt{x} \cdot (\cos x)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot \sin x \end{aligned}$$

dla $x > 0$.

c) Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{x^2+3x}{\operatorname{tg} x}$. Zauważmy, że dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} : k \text{ jest liczbą całkowitą}\right\}$. Korzystając ze wzorów (6.12), (6.9), (6.8) oraz ze wzorów (6.16) i (6.19) dostajemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(x^2+3x\right)' \cdot \operatorname{tg} x - \left(x^2+3x\right) \cdot (\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} \\ &= \frac{(2x+3)\operatorname{tg} x - \frac{x^2+3x}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} \\ &= \frac{(2x+3)\sin x \cos x - x^2 - 3x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

dla $x \neq k\frac{\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

d) Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{1}{x}\right)$. Zauważmy, że funkcja f jest złożeniem, w którym funkcją wewnętrzną jest $g(x) = x + \frac{1}{x}$, zaś funkcją zewnętrzną jest $h(t) = \operatorname{ctg} t$. Stosując wzory (6.9) i (6.22) oraz (6.16) otrzymujemy

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Ze wzoru (6.20) mamy $h'(t) = -\frac{1}{\sin^2 t}$. Zatem z (6.14) dostajemy

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{1}{x}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

e) Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = \cos^3(2x+1)$. Zauważmy, że funkcja f jest złożeniem, w którym funkcją zewnętrzną jest $h(t) = t^3$, zaś funkcją wewnętrzną jest $g(x) = \cos(2x+1)$. Ze wzoru (6.16) mamy $h'(t) = 3t^2$. Stąd, stosując wzór (6.14), otrzymujemy

$$f'(x) = 3\cos^2(2x+1) \cdot (\cos(2x+1))',$$

gdzie drugi czynnik jest złożeniem, w którym funkcją zewnętrzną jest $k(u) = \cos u$, zaś funkcją wewnętrzną jest $l(x) = 2x+1$. Stosując ponownie wzór (6.14) i wzory (6.9) oraz (6.18) mamy

$$(\cos(2x+1))' = -2\sin(2x+1).$$

Ostatecznie

$$f'(x) = -6\cos^2(2x+1)\sin(2x+1).$$

6.3 Monotoniczność i ekstrema funkcji

Okazuje się, że pochodną daje się wykorzystać do badania pewnych własności samej funkcji. Mamy mianowicie:

Twierdzenie 6.14 *Załóżmy, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$, gdzie I jest dowolnym przedziałem, jest funkcją różniczkowalną w I. Wówczas jeżeli $f'(x) > 0$ (odp. $f'(x) < 0$) dla $x \in I$, to funkcja f jest rosnąca (odp. malejąca) w przedziale I.*

Uwaga 6.15 *Pamiętajmy, że w twierdzeniu powyższym istotne jest założenie, że funkcja f jest określona i ma pochodną określonego znaku w przedziale, a nie w innym zbiorze nie będącym przedziałem. Bez tego założenia twierdzenie nie jest prawdziwe. Ponadto przedział I jest dowolnym przedziałem, a więc właściwym lub niewłaściwym, otwartym, domkniętym lub jednostronnie domkniętym.*

Uwaga 6.16 *Okazuje się, że w Twierdzeniu 6.14 można trochę osłabić założenie dotyczące znaku pochodnej. Mianowicie, jeśli pochodna jest nieujemna w I, przy czym ma w tym przedziale co najwyżej skończoną ilość miejsc zerowych, to f jest funkcją rosnącą w I. Analogiczne osłabienie założeń działa w przypadku pochodnej niedodatniej i funkcji malejącej.*

Przykład 6.17 *a) Zbadamy monotoniczność funkcji f danej wzorem $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$, bo mianownik jest różny od zera dla dowolnej liczby x. Obliczymy pochodną*

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Zbadamy znak pochodnej. Mianownik pochodnej jest dodatni, więc znak pochodnej jest taki sam, jak znak wyrażenia w liczniku

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Longleftrightarrow x \in (-1; 1),$$

$$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow 1 - x^2 < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).$$

Zatem na mocy Twierdzenia 6.14 funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-1; 1)$ oraz malejąca w przedziałach $(-\infty; -1)$ i $(1; \infty)$. Zauważmy, że liczby -1 i 1 są miejscami zerowymi pochodnej. Zatem zgodnie z Uwagą 6.16 możemy powiedzieć, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -1; 1\rangle$ oraz malejąca w przedziałach $(-\infty; -1\rangle$ i $\langle 1; \infty)$.

b) Zbadamy monotoniczność funkcji f danej wzorem $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$. Obliczymy pochodną

$$f'(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = \left(x^2 - 1\right)^2.$$

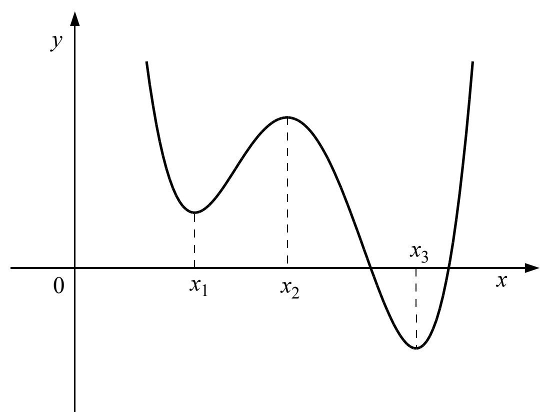
Zauważmy, że pochodna f' jest nieujemna w całym zbiorze liczb rzeczywistych i jedynymi jej miejscami zerowymi są liczby -1 i 1. Zatem na mocy Uwagi 6.16 funkcja f jest rosnąca w $\mathbb{R}$.

Definicja 6.18 *Niech* $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ *i* $x_0 \in (a; b)$. *Mówimy, że funkcja* f *ma maksimum (odp. minimum) lokalne w punkcie* x_0, *gdy istnieje* $\varepsilon > 0$ *takie, że dla* $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon)$ *zachodzi nierówność*

$$f(x) < f(x_0) \quad (\textit{odp. } f(x) > f(x_0)\,).$$

Maksimum i minimum lokalne obejmujemy wspólną nazwą — ekstrema lokalne.

Zauważmy, że w punkcie, który jest maksimum lokalnym funkcji f, funkcja ta przyjmuje największą wartość w stosunku do swoich wartości w punktach leżących blisko punktu x_0. Poza otoczeniem o promieniu ε tego punktu mogą się już pojawić punkty, w których wartość funkcji f będzie większa niż w punkcie x_0. Dlatego maksimum to nazywamy lokalnym. Analogiczna uwaga dotyczy minimum lokalnego.



Rys. 6.3

Na rysunku widzimy, że dla argumentów x_1, x_3 funkcja osiąga minima lokalne, zaś dla x_2 osiąga maksimum lokalne. Równocześnie w punkcie x_3 jest osiągana wartość najmniejsza podczas, gdy funkcja ta nie ma wartości największej (przy założeniu, że dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}$ i poza narysowanym fragmentem wykresu funkcja już nie zmienia swojej monotoniczności).

Twierdzenie 6.19 *(warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego) Niech* $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ *i* $x_0 \in (a; b)$. *Załóżmy, że funkcja* f *jest różniczkowalna w punkcie* x_0. *Jeżeli funkcja* f *ma w punkcie* x_0 *ekstremum lokalne, to* $f'(x_0) = 0$.

Uwaga 6.20 *Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Np. dla funkcji* $f(x) = x^3$ *mamy* $f'(0) = 0$. *Równocześnie dla* $x > 0$ *mamy* $f(x) > 0 = f(0)$, *zaś dla* $x < 0$ *mamy* $f(x) < 0 = f(0)$. *Zatem funkcja ta nie ma ekstremum lokalnego w punkcie* 0.

Z twierdzenia powyższego wynika, że jeżeli f jest funkcją różniczkowalną w przedziale $(a; b)$, to jedynymi punktami, w których może istnieć ekstremum lokalne są miejsca zerowe pochodnej funkcji f.

Definicja 6.21 *Miejsca zerowe pochodnej funkcji f nazywamy punktami stacjonarnymi lub krytycznymi tej funkcji.*

Aby rozpoznać czy w danym punkcie stacjonarnym funkcji f jest ekstremum, potrzebujemy znajomości następującego faktu:

Twierdzenie 6.22 *(warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego) Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna na pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0. Jeżeli spełnione są warunki:*
1^o $f'(x_0) = 0$,
2^o Istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że albo

$$a)\ \ f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (x_0 - \varepsilon; x_0) \quad i \quad f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (x_{0;}, x_0 + \varepsilon)$$

albo

$$b)\ \ f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (x_0 - \varepsilon; x_0) \quad i \quad f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (x_0; x_0 + \varepsilon),$$

to funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0. Przy tym jest to minimum, gdy spełniony jest warunek a) oraz jest to maksimum, gdy spełniony jest warunek b).

Zauważmy, że warunek 2^o Twierdzenia 6.22 można krótko sformułować mówiąc, że w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodna zmienia znak w punkcie x_0.

Uwaga 6.23 *Jeżeli pochodna funkcji f spełnia warunek 1^o i ma stały znak w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, to funkcja f nie może mieć ekstremum w punkcie x_0. Istotnie, wtedy na mocy Uwagi 6.16 funkcja jest w otoczeniu punktu x_0 monotoniczna, więc nie może mieć ekstremum w środku tego otoczenia.*

Uwaga 6.24 *Założenia Twierdzenia 6.22 można nieco osłabić. Mianowicie, jeżeli funkcja f jest ciągła na pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz różniczkowalna w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, przy czym spełnione jest założenie 2^o, to funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0.*

Przykład 6.25 *Wyznaczymy ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$. Zauważmy, że dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych oraz, że funkcja ta jest różniczkowalna jako wielomian. Obliczymy jej pochodną*

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1.$$

Wyznaczymy miejsca zerowe tej pochodnej i zbadamy jej znak

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 1,$$

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; \infty),$$

$$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 < 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right).$$

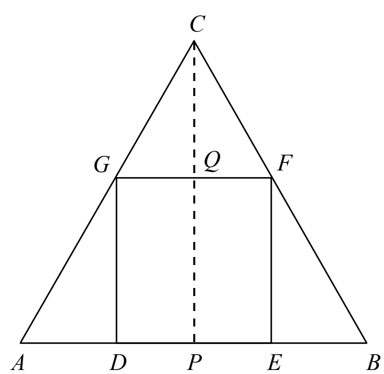
Widzimy więc, że pochodna funkcji f w swoich miejscach zerowych $\frac{1}{3}$, 1 zmienia znak: w punkcie $\frac{1}{3}$ z dodatniego na ujemny oraz w punkcie 1 z ujemnego na dodatni. Zatem funkcja f osiąga w punkcie $\frac{1}{3}$ maksimum lokalne o wartości $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{131}{27}$ oraz w punkcie 1 minimum lokalne o wartości $f(1) = -5$.

6.4 Zadania optymalizacyjne

Poznana przez nas powyżej teoria pozwala rozwiązywać pewne zadania optymalizacyjne.

Przykład 6.26 *W stożek, którego przekrojem osiowym jest trójkąt równoboczny wpisano walec o największej objętości. Obliczymy stosunek promienia podstawy stożka do wysokości walca.*

Oznaczymy przez R długość promienia podstawy stożka. Ponieważ przekrój osiowy tego stożka jest trójkątem równobocznym, więc wysokość stożka jest wysokością trójkąta równobocznego o boku $2R$. Zatem wynosi ona $H = R\sqrt{3}$. Narysujmy przekrój osiowy naszego stożka



Rys. 6.4

Niech $r = \left|\overline{PE}\right|$ oznacza długość promienia podstawy walca wpisanego, zaś $h = \left|\overline{PQ}\right|$ — długość wysokości tego walca. Aby wyznaczyć walec o największej objętości musimy skonstruować funkcję V, która będzie opisywać objętość walca w zależności np. od r. Zauważmy, że objętość walca wylicza się ze wzoru $V = \pi r^2 h$. Trzeba więc uzależnić wysokość h od promienia r, wykorzystując fakt, że walec jest wpisany w stożek. Przy oznaczeniach wprowadzonych na rysunku trójkąty EBF i PBC są podobne, gdyż odpowiadające sobie kąty wewnętrzne *tych trójkątów mają jednakowe miary. Zatem odpowiadające sobie boki są proporcjonalne, czyli np.*

$$\frac{|\overline{EB}|}{|\overline{PB}|} = \frac{|\overline{EF}|}{|\overline{PC}|},$$

więc

$$\frac{R-r}{R} = \frac{h}{R\sqrt{3}}.$$

Stąd obliczymy

$$h = (R-r)\sqrt{3}.$$

W konsekwencji objętość walca opisuje się za pomocą wzoru

$$V(r) = \pi\sqrt{3}r^2(R-r),$$

w którym r jest argumentem funkcji, zaś R traktujemy jako parametr. Z warunków geometrycznych wynika, że za dziedzinę funkcji V przyjmujemy przedział $D_V = (0;R)$. Wyznaczymy ekstrema lokalne funkcji V w tym przedziale. W tym celu obliczamy pochodną funkcji V

$$V'(r) = \pi\sqrt{3}\left(2Rr - 3r^2\right).$$

Wyznaczymy miejsca zerowe pochodnej i zbadamy jej znak

$$V'(r) = 0 \Longleftrightarrow r = 0 \notin D_V \vee r = \frac{2}{3}R \in D_V,$$

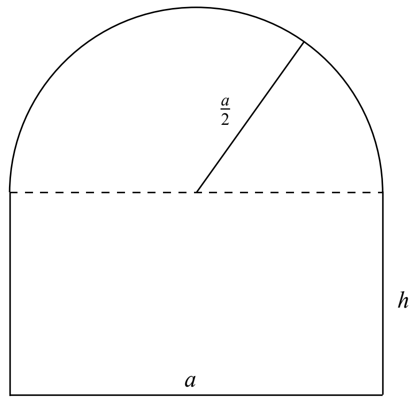
$$V'(r) < 0 \Longleftrightarrow r \in \left(\frac{2}{3}R;R\right),$$

$$V'(r) > 0 \Longleftrightarrow r \in \left(0;\frac{2}{3}R\right).$$

Zatem funkcja V ma ekstremum lokalne w punkcie $r = \frac{2}{3}R$ oraz jest to maksimum. Co więcej, ponieważ funkcja V jest rosnąca w przedziale $\left(0,\frac{2}{3}R\right)$ i malejąca w przedziale $\left(\frac{2}{3}R,R\right)$, więc to maksimum lokalne jest jednocześnie największą wartością funkcji V. Zatem w walcu o największej objętości długość promienia podstawy wynosi $r = \frac{2}{3}R$, zaś długość jego wysokości wynosi $h = \left(R - \frac{2}{3}R\right)\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}R$. W konsekwencji szukany stosunek długości promienia podstawy stożka do długości wysokości walca o największej objętości wynosi

$$d = \frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{3}R} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Przykład 6.27 *Przekrój kanału ma kształt prostokąta zwieńczonego półkolem, którego średnicą jest górny bok prostokąta. Obwód przekroju jest równy p. Wyznaczymy wymiary przekroju tak, by pole jego powierzchni było maksymalne.*



Rys. 6.5

Oznaczymy przez a szerokość naszego kanału. Musimy wyznaczyć wzór funkcji P, która będzie opisywać pole powierzchni przekroju w zależności od argumentu a. Jeżeli przez h oznaczymy wysokość prostokąta stanowiącego dolną część przekroju, to pole powierzchni przekroju wyraża się wzorem

$$P = ah + \frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4} = ah + \frac{\pi a^2}{8},$$

gdyż promień półkola wchodzącego w skład przekroju ma długość $\frac{a}{2}$. Zauważmy teraz, że mając daną długość obwodu przekroju możemy wyrazić wysokość h za pomocą a. Mianowicie

$$p = a + 2h + \frac{\pi a}{2},$$

skąd

$$h = \frac{p}{2} - \frac{a}{2} - \frac{\pi a}{4} = \frac{1}{2}\left(p - a\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Zatem poszukiwana przez nas funkcja wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} P(a) &= \frac{1}{2}a\left(p - a\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{\pi a^2}{8} = \frac{1}{2}a\left(p - a\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi a}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}a\left(p - a - \frac{\pi a}{2} + \frac{\pi a}{4}\right) = \frac{1}{2}a\left(p - a - \frac{\pi a}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}pa - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)a^2. \end{aligned}$$

Z warunków geometrycznych zadania wyznaczymy dziedzinę funkcji P

$$D_P = \left(0; \frac{p}{1 + \frac{\pi}{2}}\right) = \left(0; \frac{2p}{2 + \pi}\right),$$

bo przy $a = \frac{p}{1+\frac{\pi}{2}}$ wysokość h przestaje być dodatnia.

Wyznaczymy pochodną funkcji P

$$P'(a) = \frac{1}{2}p - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)a.$$

Znajdziemy teraz miejsca zerowe funkcji P' oraz zbadamy jej znak

$$P'(a) = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{\frac{1}{2}p}{1+\frac{\pi}{2}} = \frac{p}{2+\pi} \in D_P,$$

$$P'(a) < 0 \Longleftrightarrow a \in \left(\frac{p}{2+\pi}; \frac{2p}{2+\pi}\right),$$

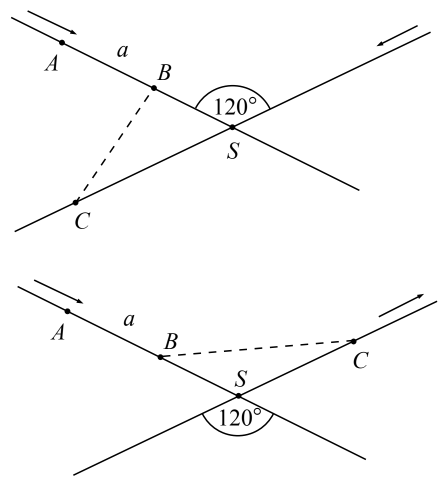
$$P'(a) > 0 \Longleftrightarrow a \in \left(0; \frac{p}{2+\pi}\right).$$

Zatem funkcja P ma ekstremum lokalne w punkcie $a = \frac{p}{2+\pi}$, przy czym jest to maksimum. Co więcej ponieważ funkcja P rośnie w przedziale $\left(0; \frac{p}{2+\pi}\right)$ i maleje w przedziale $\left(\frac{p}{2+\pi}; \frac{2p}{2+\pi}\right)$, więc w punkcie tym funkcja P osiąga swoją największą wartość. Ostatatecznie szerokość kanału o największym polu powierzchni przekroju wynosi $a = \frac{p}{2+\pi}$, zaś wysokość ściany bocznej tego kanału wynosi

$$\begin{aligned} h &= \frac{p}{2} - \frac{p}{2(2+\pi)} - \frac{\pi p}{4(2+\pi)} = \frac{p(4+2\pi) - 2p - \pi p}{4(2+\pi)} \\ &= \frac{4p + 2\pi p - 2p - \pi p}{4(2+\pi)} = \frac{p(2+\pi)}{4(2+\pi)} = \frac{p}{4}. \end{aligned}$$

Przykład 6.28 *Dwa samoloty lecą wzdłuż linii prostych znajdujących się w tej samej płaszczyźnie. Tory lotu samolotów tworzą kąt 120^o. W momencie, gdy jeden z samolotów mijał punkt przecięcia się torów lotu, drugi znajdował się w odległości a km przed tym punktem. Obliczymy, po jakim czasie od tego momentu odległość między samolotami będzie najmniejsza i ile będzie równa, jeżeli samoloty lecą z tą samą prędkością v km/godz.*

Wykonamy pomocniczy rysunek (rys. 6.6). Mogą zajść dwa przypadki przedstawione na rysunku. Czarną kropką oznaczone jest położenie samolotów w chwili $t_0 = 0$, gdy jeden z nich znajduje się w punkcie przecięcia się torów lotu. Kropką pustą w środku oznaczone jest położenie samolotów po upływie pewnego czasu t. Ułożymy wzór opisujący kwadrat d odległości samolotów w zależności od czasu. Oczywiście kwadrat odległości osiąga wartość najmniejszą w tym samym momencie co sama odległość. Oznaczymy symbolem $d_1(t)$ kwadrat odległości samolotów w chwili t dla pierwszego przypadku, zaś przez $d_2(t)$ kwadrat odległości samolotów w chwili t dla drugiego przypadku (na rysunkach w obu przypadkach jest to kwadrat długości odcinka $\overline{BC}$). Zauważmy, że w pierwszym przypadku dla $t \leqslant \frac{a}{v}$ (czyli do chwili, w której drugi samolot osiągnie punkt przecięcia się torów lotu) kąt $\sphericalangle BSC$ ma miarę 60^o. Ponadto $\left|\overline{AB}\right| = vt$, więc $\left|\overline{BS}\right| = a - vt$ oraz $\left|\overline{SC}\right| = vt$. Skorzystamy z twierdzenia kosinusów w trójkącie BSC.



Rys. 6.6

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \left|\overline{BS}\right|^2 + \left|\overline{SC}\right|^2 - 2\left|\overline{BS}\right| \cdot \left|\overline{SC}\right| \cdot \cos\sphericalangle BSC \\ &= (a-vt)^2 + (vt)^2 - (a-vt)\,vt \\ &= 3v^2t^2 - 3avt + a^2 \end{aligned}$$

dla $t \in \left\langle 0; \frac{a}{v} \right\rangle$. *Dla* $t \geqslant \frac{a}{v}$ *mamy* $\left|\overline{SB}\right| = vt - a$, *a* $\left|\overline{SC}\right| = vt$ *i przy tym miara* $\sphericalangle BSC$ *wynosi* 120^o, *więc otrzymujemy*

$$\begin{aligned} d_1(t) &= (vt-a)^2 + (vt)^2 + (vt-a)\,vt \\ &= 3v^2t^2 - 3avt + a^2. \end{aligned}$$

Ostatecznie w pierwszym przypadku nasza funkcja wyraża się wzorem

$$d_1(t) = 3v^2t^2 - 3avt + a^2 \quad \text{dla } t \geqslant 0.$$

Zobaczmy jak wygląda sytuacja w drugim przypadku. Dla $t \in \left\langle 0; \frac{a}{v} \right\rangle$ *mamy z twierdzenia kosinusów w trójkącie* BSC

$$\begin{aligned} d_2(t) &= (a-vt)^2 + (vt)^2 + (a-vt)\,vt \\ &= v^2t^2 - avt + a^2 \end{aligned}$$

i dla $t \geqslant \frac{a}{v}$ *mamy*

$$\begin{aligned} d_2(t) &= (vt-a)^2 + (vt)^2 - (vt-a)\,vt \\ &= v^2t^2 - avt + a^2. \end{aligned}$$

Ostatecznie w drugim przypadku mamy

$$d_2(t) = v^2t^2 - avt + a^2 \quad \text{dla } t \geqslant 0.$$

Musimy wyznaczyć najmniejszą wartość dla obu funkcji w zbiorze $\langle 0; \infty)$.

Zajmiemy się najpierw funkcją d_1

$$d_1'(t) = 6v^2t - 3av = 3v(2vt - a)$$

$$d_1'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{a}{2v}$$

$$d_1'(t) < 0 \Longleftrightarrow t < \frac{a}{2v}$$

$$d_1(t) > 0 \Longleftrightarrow t > \frac{a}{2v}.$$

Zatem funkcja d_1 *ma ekstremum lokalne w punkcie* $t = \frac{a}{2v}$, *przy czym jest to minimum. Ponieważ funkcja* d_1 *maleje w przedziale* $\left\langle 0; \frac{a}{2v}\right)$ *i rośnie w przedziale* $\left(\frac{a}{2v}; \infty\right)$, *więc w punkcie* $t = \frac{a}{2v}$ *ma swoją wartość najmniejszą. Dla funkcji* d_2 *mamy*

$$d_2'(t) = 2v^2t - av = v(2vt - a)$$

$$d_2'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{a}{2v}$$

$$d_2'(t) < 0 \Longleftrightarrow t < \frac{a}{2v}$$

$$d_2(t) > 0 \Longleftrightarrow t > \frac{a}{2v}.$$

Zatem funkcja d_2 *ma ekstremum lokalne w punkcie* $t = \frac{a}{2v}$, *przy czym jest to minimum. Ponieważ funkcja* d_2 *maleje w przedziale* $\left\langle 0; \frac{a}{2v}\right)$ *i rośnie w przedziale* $\left(\frac{a}{2v}; \infty\right)$, *więc w punkcie* $t = \frac{a}{2v}$ *ma swoją wartość najmniejszą.*

Ostatecznie niezależnie od przypadku samoloty są najbliżej siebie w chwili $t = \frac{a}{2v}$, *czyli w chwili, gdy drugi samolot jest w połowie drogi przed punktem przecięcia się torów lotu. W tym momencie odległość samolotów jest równa: dla pierwszego przypadku*

$$\sqrt{d_1\left(\frac{a}{2v}\right)} = \sqrt{3v^2\frac{a^2}{4v^2} - 3av\frac{a}{2v} + a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2},$$

zaś dla drugiego przypadku

$$\sqrt{d_2\left(\frac{a}{2v}\right)} = \sqrt{v^2\frac{a^2}{4v^2} - av\frac{a}{2v} + a^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

6.5 Pełne badanie przebiegu zmienności funkcji

Naszym dalszym celem jest opracowanie schematu postępowania służącego badaniu przebiegu zmienności funkcji. Badając przebieg zmienności funkcji będziemy postępować według następującego schematu:

1) Wyznaczenie dziedziny funkcji,
2) Znalezienie punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami,
3) Obliczenie granic funkcji we wszystkich krańcach dziedziny,
4) Wyznaczenie asymptot ukośnych wykresu funkcji,
5) Obliczenie pochodnej i wyznaczanie jej dziedziny,
6) Wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej, badanie jej znaku oraz obliczanie wartości funkcji w miejscach zerowych pochodnej,
7) Sporządzenie tabelki,
8) Naszkicowanie wykresu.

Zastosowania tego schematu postępowania zaprezentujemy na kilku przykładach:

Przykład 6.29 *Zbadamy przebieg zmienności funkcji f danej wzorem $f(x) = x^4 - 18x^2 - 17$. Dziedziną funkcji f jest $D_f = \mathbb{R}$. Dla wyznaczenia punktów przecięcia z osią Ox rozwiązujemy równanie*

$$x^4 - 18x^2 - 17 = 0.$$

Podstawiając $t = x^2 \geqslant 0$ otrzymujemy równanie kwadratowe

$$t^2 - 18t - 17 = 0.$$

Dla trójmianu stojącego po lewej stronie wyróżnik wynosi $\Delta = 392$ i stąd

$$t = 9 - 7\sqrt{2} < 0 \vee t = 9 + 7\sqrt{2} \geqslant 0.$$

Odrzucamy pierwszy z tych pierwiastków, bo jest ujemny, a z drugiego otrzymamy

$$x^2 = 9 + 7\sqrt{2},$$

a zatem

$$x = -\sqrt{9 + 7\sqrt{2}} \approx -4,347\,4 \vee x = \sqrt{9 + 7\sqrt{2}} \approx 4,347\,4.$$

Oznaczymy pierwszy z tych pierwiastków symbolem x_1, zaś drugi symbolem x_2. Punktami przecięcia z osią Ox są punkty $\left(-\sqrt{9+7\sqrt{2}}, 0\right)$ oraz $\left(\sqrt{9+7\sqrt{2}}, 0\right)$. Dla wyznaczenia punktu przecięcia z osią Oy, obliczamy $f(0) = -17$. Punktem przecięcia z osią Oy jest punkt $(0, -17)$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}$ i funkcja ta jest elementarna, więc jej wykres nie może mieć asymptot pionowych. Obliczymy teraz granice na krańcach dziedziny

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(x^4 - 18x^2 - 17\right) = [\infty - \infty] \\ &= \lim_{x\to-\infty} x^4\left(1 - \frac{18}{x^2} - \frac{17}{x^4}\right) = +\infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(x^4-18x^2-17\right)=[\infty-\infty]\\ &= \lim_{x\to\infty} x^4\left(1-\frac{18}{x^2}-\frac{17}{x^4}\right)=+\infty.\end{aligned}$$

Zajmiemy się teraz asymptotami ukośnymi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\left(x^3-18x-\frac{17}{x}\right)=[\infty-\infty]\\ &= \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{18}{x^2}-\frac{17}{x^4}\right)=-\infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\left(x^3-18x-\frac{17}{x}\right)=[\infty-\infty]\\ &= \lim_{x\to\infty} x^3\left(1-\frac{18}{x^2}-\frac{17}{x^4}\right)=+\infty.\end{aligned}$$

Zatem wykres funkcji f nie ma asymptoty ukośnej ani w $-\infty$, ani w $+\infty$.

Obliczymy teraz pochodną funkcji f

$$f'(x)=4x^3-36x,$$

przy czym $D_{f'}=D_f$. Znajdziemy miejsca zerowe pochodnej i zbadamy jej znak

$$\begin{aligned}f'(x)=0 &\Longleftrightarrow 4x^3-36x=0\\ &\Longleftrightarrow x(x+3)(x-3)=0 \Longleftrightarrow x=0\vee x=-3\vee x=3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x)>0 &\Longleftrightarrow 4x^3-36x>0\\ &\Longleftrightarrow x(x+3)(x-3)>0 \Longleftrightarrow x\in(-3;0)\cup(3;\infty),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x)<0 &\Longleftrightarrow 4x^3-36x<0\\ &\Longleftrightarrow x(x+3)(x-3)<0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(0;3).\end{aligned}$$

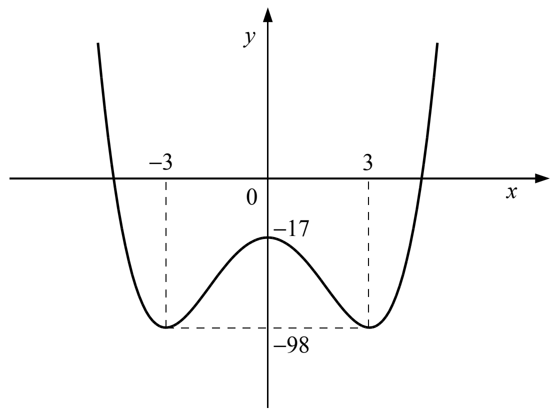
Obliczymy teraz wartości funkcji f w miejscach zerowych pochodnej

$$f(0)=-17\quad,\quad f(-3)=-98\quad,\quad f(3)=-98.$$

Sporządzimy tabelkę dla funkcji f:

x	$-\infty$		x_1		-3		0		3		x_2		∞
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	-98	$\nearrow$	-17	$\searrow$	-98	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

Na podstawie tabelki szkicujemy wykres funkcji



Rys. 6.7

Jak widać funkcja f ma minima lokalne w punktach -3 i 3 o wartości -98 oraz maksimum lokalne w punkcie 0 o wartości -17.

Przykład 6.30 *Zbadamy przebieg zmienności funkcji f danej wzorem $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$. Dziedziną tej funkcji jest $D_f = (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$. Zauważmy, że wykres funkcji f nie ma punktów przecięcia z osią Ox, gdyż licznik ułamka opisującego funkcję f jest zawsze różny od zera. Znajdźmy punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią Oy. W tym celu obliczymy $f(0) = -\frac{1}{3}$. Zatem wykres przecina oś Oy w punkcie $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$. Obliczymy teraz granice funkcji f w punktach będących krańcami dziedziny*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} \frac{x^2+1}{x-3} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} \frac{x^2+1}{x-3} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = +\infty.$$

Z rachunków tych wynika, że prosta o równaniu $x = 3$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji f. Wyznaczymy teraz asymptoty ukośne. W tym celu obliczymy granice

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} = 1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right] &= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-3}-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2+3x}{x-3}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 3.\end{aligned}$$

Widać, że odpowiednie granice w $+\infty$ będą obliczane podobnie i będą miały te same wartości. Stąd prosta o równaniu $y = x+3$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji f zarówno w $-\infty$, jak i w $+\infty$.

Wyznaczymy teraz pochodną funkcji f

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)-\left(x^2+1\right)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-x^2-1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-1}{(x-3)^2}.$$

Łatwo widać, że $D_{f'} = D_f$. Wyznaczymy miejsca zerowe pochodnej

$$\begin{aligned}f'(x)=0 &\iff x^2-6x-1=0\\ &\iff x = 3-\sqrt{10}\approx -0,1623 \quad \vee \quad x = 3+\sqrt{10}\approx 6,1623.\end{aligned}$$

Oznaczymy pierwszy z tych pierwiastków przez x_1, zaś drugi przez x_2. Ponie-waż mianownik pochodnej jest w jej dziedzinie zawsze dodatni, więc

$$f'(x)<0 \iff x^2-6x-1<0 \iff x\in(x_1;x_2),$$

$$f'(x)>0 \iff x^2-6x-1>0 \iff x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty).$$

Obliczymy teraz wartości funkcji f w miejscach zerowych pochodnej

$$\begin{aligned}f(x_1) = f\left(3-\sqrt{10}\right) &= \frac{\left(3-\sqrt{10}\right)^2+1}{3-\sqrt{10}-3}\\ &= \frac{9-6\sqrt{10}+10+1}{-\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}-20}{\sqrt{10}}\\ &= 6-\frac{20}{\sqrt{10}} = 6-2\sqrt{10}\approx -0,3246,\end{aligned}$$

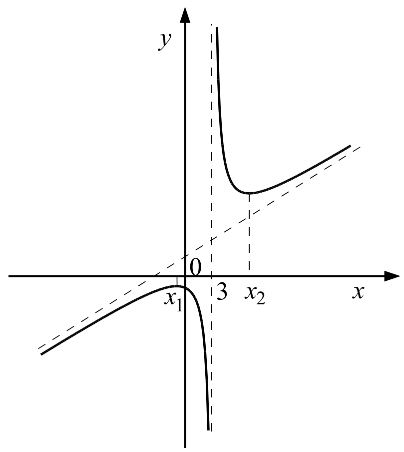
i analogicznie

$$f(x_2) = f\left(3+\sqrt{10}\right) = 6+2\sqrt{10}\approx 12,325.$$

Sporządzimy tabelkę:

x	$-\infty$		x_1		0		3		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Widać więc, że funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie x_1 oraz minimum lokalne w punkcie x_2. Oto wykres funkcji f



Rys. 6.8

Przykład 6.31 *Zbadamy przebieg zmienności funkcji f danej wzorem $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-1}$. Dziedziną funkcji f jest $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$. Wyznaczymy punkty przecięcia z osią Ox*

$$x^2 - 2 = 0 \iff x = -\sqrt{2} \quad \vee \quad x = \sqrt{2}.$$

Zatem punktami przecięcia z osią odciętych są $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $\left(\sqrt{2}, 0\right)$. Obliczymy wartość funkcji f w punkcie 0

$$f(0) = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Stąd punktem przecięcia z osią Oy jest $(0, 2)$. Obliczymy granice funkcji f w punktach będących krańcami dziedziny

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2-2}{x^2-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2-2}{x^2-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-2}{x^2-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2-2}{x^2-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Z powyższych rachunków wynika, że proste o równaniach $x = -1$ i $x = 1$ są asymptotami pionowymi obustronnymi wykresu funkcji f oraz, że prosta o równaniu $y = 1$ jest asymptotą ukośną (szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej — asymptotą poziomą) wykresu funkcji f w $+\infty$ i w $-\infty$. Zatem, ponieważ wykres nie może mieć różnych asymptot ukośnych w $+\infty$, ani w $-\infty$, a asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej, więc nie ma potrzeby w tym przykładzie wyznaczać innych asymptot ukośnych.

Obliczymy pochodną funkcji f

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2-1\right) - 2x\left(x^2-2\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Dziedziną pochodnej jest $D_{f'} = D_f$. Wyznaczymy miejsca zerowe pochodnej

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Ponieważ mianownik pochodnej jest dodatni w jej dziedzinie, więc

$$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow 2x < 0 \ \wedge \ x \in D_{f'} \Longleftrightarrow x < 0 \ \wedge \ x \neq -1$$

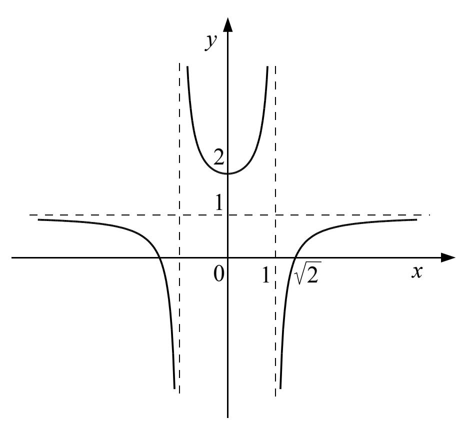
oraz

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 2x > 0 \ \wedge \ x \in D_{f'} \Longleftrightarrow x > 0 \ \wedge \ x \neq 1.$$

Skonstruujemy tabelkę dla funkcji f:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Widać, że jedynym ekstremum lokalnym funkcji f jest minimum w punkcie 0 równe 2. Naszkicujemy wykres funkcji f:



Rys. 6.9

Przykład 6.32 *Zbadamy przebieg zmienności funkcji f danej wzorem $f(x) = x^3 - x^2 + |x-1|$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \mathbb{R}$. Zauważmy, że funkcję f na mocy definicji modułu można zapisać za pomocą wzoru*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x - 1, \text{ dla } x \geqslant 1 \\ x^3 - x^2 - x + 1, \text{ dla } x < 1 \end{cases}. \tag{6.23}$$

Wyznaczymy punkty przecięcia z osią Ox. W tym celu rozwiązujemy równanie

$$x^3 - x^2 + |x-1| = 0.$$

Jest ono równoważne następującej alternatywie

$$\left(x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \ \wedge \ x \geqslant 1\right) \ \vee \ \left(x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \ \wedge \ x < 1\right).$$

Równanie z pierwszego składnika alternatywy jest równoważne równaniu

$$\left(x^2 + 1\right)(x - 1) = 0,$$

a stąd

$$x = 1$$

spełnia nierówność $x \geqslant 1$. Zatem rozwiązaniem pierwszego składnika alternatywy jest $x = 1$. Równanie z drugiego składnika alternatywy jest równoważne równaniu

$$\left(x^2 - 1\right)(x - 1) = 0,$$

czyli

$$(x-1)^2 (x+1) = 0,$$

a stąd

$$x = 1 \vee \ x = -1,$$

przy czym pierwszy z tych pierwiastków nie spełnia nierówności $x < 1$, zaś drugi spełnia tę nierówność. Zatem rozwiązaniem drugiego składnika alternatywy jest $x = -1$. Ostatecznie wykres funkcji f przecina oś Ox w punktach $(-1, 0)$ oraz $(1, 0)$. Dla wyznaczenia punktu przecięcia z osią Oy obliczymy wartość funkcji w punkcie 0

$$f(0) = 1,$$

więc wykres przecina oś Oy w punkcie $(0, 1)$.

Obliczymy granice funkcji f w krańcach dziedziny

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^3 - x^2 + |x-1|\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^3 - x^2 - x + 1\right)$$
$$= [\infty - \infty] = \lim_{x\to-\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(x^3 - x^2 + |x-1|\right) = \lim_{x\to\infty} \left(x^3 - x^2 + x - 1\right)$$
$$= [\infty - \infty] = \lim_{x\to\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty.$$

Sprawdzimy teraz, czy wykres funkcji f ma asymptoty ukośne

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^2-x+1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-x-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x+1-\frac{1}{x}\right)\\&=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=+\infty.\end{aligned}$$

Zatem wykres funkcji f nie ma asymptot ukośnych.

Obliczymy pochodną funkcji f. Wprost ze wzoru (6.23) mamy

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-2x+1, & dla\ x>1\\ 3x^2-2x-1, & dla\ x<1\end{cases}.$$

Pozostaje sprawdzić, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie $x_0=1$. Zrobimy to wykorzystując definicję pochodnej. Obliczymy więc granice jednostronne ilorazu różnicowego

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3-x^2-x+1}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\\&=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)\left(x^2-1\right)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\left(x^2-1\right)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\\&=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\left(x^2+1\right)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\left(x^2+1\right)=2.\end{aligned}$$

Zatem funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie 1, więc $D_{f'}=D_f\setminus\{1\}$. Wyznaczymy miejsca zerowe pochodnej. Dla $x>1$ pochodna pokrywa się z trójmianem $3x^2-2x+1$, którego wyróżnik jest liczbą ujemną. Zatem pochodna nie ma miejsc zerowych wśród liczb $x>1$. Dla $x<1$ rozwiążemy równanie

$$3x^2-2x-1=0.$$

Otrzymujemy dwa pierwiastki $x=1$ lub $x=-\frac{1}{3}$, przy czym tylko drugi z nich spełnia warunek $x<1$. Zatem pochodna ma tylko jedno miejsce zerowe $x=-\frac{1}{3}$. Trójmian opisujący pochodną dla $x>1$ przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie, czyli $f'(x)>0$ dla $x>1$. Dla $x<1$ z wykresu trójmianu $3x^2-2x-1$ odczytujemy, że $f'(x)>0$ dla $x<-\frac{1}{3}$ oraz $f'(x)<0$ dla $x\in\left(-\frac{1}{3};1\right)$. Obliczymy wartość funkcji f w punkcie $x=-\frac{1}{3}$

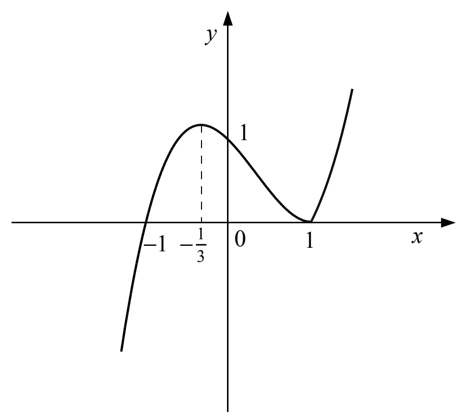
$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1=\frac{32}{27}.$$

Zauważmy, że funkcja f jest funkcją elementarną, więc ciągłą w całej dziedzinie. Z powyższych rachunków wynika, że w pewnym sąsiedztwie lewostronnym punktu 1 pochodna jest ujemna, zaś w pewnym sąsiedztwie prawostronnym jest dodatnia, więc na mocy Uwagi 6.24 funkcja f ma minimum lokalne o wartości $f(1) = 0$.

Skonstruujmy tabelkę dla funkcji f:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

i naszkicujmy wykres funkcji f



Rys. 6.10

6.6 Wyznaczanie wartości największej i najmniejszej

Wiadomo, że funkcja ciągła na właściwym przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$ musi osiągnąć swoją wartość największą i swoją wartość najmniejszą (Twierdzenie 5.37). W szczególnym przypadku, gdy funkcja jest różniczkowalna w przedziale $\langle a; b\rangle$, zyskujemy bardzo wygodne narzędzie służące wyznaczaniu tych wartości, mianowicie:

Twierdzenie 6.33 *Jeżeli funkcja $f : \langle a; b\rangle \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w przedziale $\langle a; b\rangle$, to jedynymi punktami, w których może osiągnąć swoją wartość największą (najmniejszą) są miejsca zerowe jej pochodnej leżące wewnątrz przedziału $\langle a; b\rangle$ lub końce tego przedziału, czyli punkty a i b.*

Uwaga 6.34 *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a; b\rangle$ oraz różniczkowalna poza skończoną liczbą punktów tego przedziału, to do zbioru punktów, w których* *może być przyjęta wartość największa bądź najmniejsza musimy dołączyć punkty nieróżniczkowalności funkcji f.*

Przykład 6.35 *a) Wyznaczymy najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem $f(x) = x + \frac{2}{x} - 2$ w przedziale $\langle 1; 4\rangle$. Obliczymy pochodną funkcji f*

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}.$$

Miejscami zerowymi pochodnej są punkty $x = -\sqrt{2} \notin (1;4)$ lub $x = \sqrt{2}$. Zatem na mocy Twierdzenia 6.33 jedynymi punktami, w których funkcja f może osiągnąć wartość najmniejszą lub największą są $x = 1$, $x = \sqrt{2}$ oraz $x = 4$. Obliczymy wartości funkcji w tych punktach

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + \frac{2}{1} - 2 = 1, \\ f\left(\sqrt{2}\right) &= \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right), \\ f(4) &= 4 + \frac{2}{4} - 2 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że najmniejszą z tych liczb jest $2\left(\sqrt{2}-1\right)$, zaś największą $\frac{5}{2}$. Zatem funkcja f swoją najmniejszą wartość na przedziale $\langle 1; 4\rangle$ przyjmuje w punkcie $\sqrt{2}$ i ta najmniejsza wartość wynosi $2\left(\sqrt{2}-1\right)$ oraz swoją największą wartość na przedziale $\langle 1; 4\rangle$ przyjmuje w punkcie 4 i ta największa wartość wynosi $\frac{5}{2}$.

b) Wyznaczymy najmniejszą i największą wartość funkcji f danej wzorem $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ w przedziale $\left\langle \frac{3}{2}; 3\right\rangle$. Obliczymy pochodną funkcji f

$$f'(x) = \frac{3x^2\left(x^2-1\right) - 2x \cdot x^3}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Miejscami zerowymi pochodnej są punkty $x = 0 \notin \left(\frac{3}{2}; 3\right)$ lub $x = -\sqrt{3} \notin \left(\frac{3}{2}; 3\right)$ lub $x = \sqrt{3}$. Zatem na mocy Twierdzenia 6.33 jedynymi punktami, w których funkcja może osiągać swoją wartość najmniejszą lub największą są $x = \frac{3}{2}$, $x = \sqrt{3}$ oraz $x = 3$. Obliczymy wartości funkcji w tych punktach

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{27}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{27}{10} = 2,7, \\ f\left(\sqrt{3}\right) &= \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598\,1, \\ f(3) &= \frac{3^3}{3^2-1} = \frac{27}{8} = 3,375. \end{aligned}$$

Najmniejszą z tych liczb jest $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, zaś największą $\frac{27}{8}$. W konsekwencji funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość na przedziale $\left\langle \frac{3}{2}; 3\right\rangle$ w punkcie $\sqrt{3}$ i ta najmniejsza wartość wynosi $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ oraz największą wartość na przedziale $\left\langle \frac{3}{2}; 3\right\rangle$ w punkcie 3 i ta największa wartość wynosi $\frac{27}{8}$.

c) Wyznaczymy najmniejszą i największą wartość funkcji f danej wzorem $f(x) = x^3 - x^2 + |x-1|$ w przedziale $\left\langle -\frac{1}{2}; 2 \right\rangle$. Z Przykładu 6.32 wiadomo, że funkcja f jest nieróżniczkowalna w punkcie $x = 1$ oraz, że jedynym miejscem zerowym pochodnej jest $x = -\frac{1}{3}$. Zatem na mocy Uwagi 6.34 jedynymi punktami, w których funkcja f może osiągnąć swoją wartość najmniejszą lub największą są $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$ oraz $x = 2$. Obliczymy wartości funkcji f w tych punktach

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{8}, \\ f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{32}{27}, \\ f(1) &= 1 - 1 = 0, \\ f(2) &= 8 - 4 + 1 = 5. \end{aligned}$$

Zatem funkcja f osiąga na przedziale $\left\langle -\frac{1}{2}; 2 \right\rangle$ swoją wartość najmniejszą w punkcie 1 i ta najmniejsza wartość wynosi 0 oraz swoją największą wartość na przedziale $\left\langle -\frac{1}{2}; 2 \right\rangle$ w punkcie 2 i ta największa wartość wynosi 5.